

ANÁLISE DA QUALIDADE DE INTERVALOS SOLUÇÃO ATRAVÉS DE DIFERENTES AMBIENTES INTERVALARES

MAURÍCIO DORNELES CALDEIRA BALBONI¹; ÉRICO ALVES GREHS²; LUCAS MENDES TORTELLI²; VINICIUS SIGNORI FURLAN²; ALICE FONSECA FINGER²; ALINE BRUM LORETO³

¹Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – baalbis@gmail.com

²Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) - {eagrehs, lmtortelli, vsfurlan, affinger}@inf.ufpel.edu.br

³Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) - aline.loreto@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Quando se trabalha com números de ponto flutuante o resultado obtido é apenas uma aproximação de um valor real e erros são gerados por arredondamentos ou por algoritmos instáveis, levando algumas vezes a resultados incorretos. Análise intervalar surgiu com o objetivo de diminuir erros numéricos gerados em procedimentos computacionais. Na matemática intervalar o valor real x é aproximado por um intervalo X que possui limites inferior e superior, de forma que o intervalo contenha x . O tamanho desse intervalo pode ser usado como medida para avaliar a sua qualidade (RATSCHEK e ROKNE, 1988).

O presente trabalho tem como objetivo analisar a qualidade dos intervalos solução em quatro ambientes intervalares - C-XSC, IntPy, IntLab e Maple Intervalar - os quais possibilitam a programação utilizando operações definidas na matemática intervalar (MOORE, 1966). A análise dá-se através da aplicação dos indicadores estatísticos descritivos intervalares: Média, Mediana, Variância, Amplitude Total, Desvio Padrão, Coeficiente de Variação, Covariância e Coeficiente de Correlação. Com esta análise verifica-se qual ambiente retorna o intervalo solução com melhor qualidade, ou seja, menor comprimento.

2. METODOLOGIA

Cálculos numéricos em computadores devem ser realizados por meio das linguagens ou bibliotecas que tenham definidos o tipo intervalo e as operações sobre o tipo, usualmente denominadas de linguagens XSC (*eXtended for Scientific Computation*) (KLATTE, 1993).

Existem diversas bibliotecas computacionais para matemática intervalar, dentre as quais quatro foram escolhidas para o presente trabalho.

Segundo RATSCHEK (1988), os computadores utilizam aritmética de ponto flutuante. Nesta aritmética, números reais são aproximados por um subconjunto de números reais chamados representação numérica da máquina. Devido a esta representação são gerados dois tipos de erros: quando uma entrada de valor real é aproximada por um número de máquina e quando o erro é causado por resultados intermediários aproximados pelos números de máquina. A aritmética intervalar fornece uma ferramenta para estimar e controlar esses erros automaticamente. No lugar de aproximar um valor real x por um número de máquina, o valor real x é aproximado por um intervalo X contendo número de máquina nos extremos inferior e superior. O intervalo X contém o valor real x . Os cálculos são executados usando intervalos ao invés de números reais e, conseqüentemente, a aritmética real é substituída pela aritmética intervalar.

Detalhando brevemente os ambientes analisados, tem-se:

- Maple Intervalar (MAPLE) é um ambiente interativo, com uma interface amigável que, para muitas finalidades, dispensa a programação. Bibliotecas Maple, uma vez carregadas, disponibilizam os comandos e operadores necessários para cálculos específicos, ou seja, intervalares. Possui uma linguagem de programação fundamentada no conceito de linguagem interpretada e um mecanismo de construção e distribuição de pacotes de programas e funções. É um software proprietário.

- IntLab (INTLAB), é um pacote desenvolvido para a ferramenta *Matlab*[®] (MATLAB). Contém tipos de dados básicos e operadores para aritmética intervalar, bem como uma variedade de métodos numéricos usando intervalos. É um pacote intervalar baseado em software proprietário.

- IntPy (INTPY) é uma biblioteca que implementa a matemática intervalar com máxima exatidão utilizando linguagem Python, que é um software livre e de grande popularidade na comunidade de computação científica, além de ter uma sintaxe simples.

- C-XSC (C++ for eXtendedScientificComputing) é uma ferramenta de programação particularmente adequada para o desenvolvimento de algoritmos numéricos que proporcionam resultados altamente precisos e verificados automaticamente (KLATTE, 1993). Todas as operações básicas (intervalares) são de exatidão máxima (KRÄMER, 2011). Por ser desenvolvido com base em C++ é um software livre e familiarizado com a comunidade da computação científica.

Quando se realiza computação com número de máquina \tilde{x} não existe estimativa do erro $|\tilde{x} - x|$. A computação com utilização de intervalos fornece as seguintes estimativas para o erro (RATSCHEK, 1988):

- Erro Absoluto: $|x - m(X)| < w(X)/2$ onde $m(X)$ é o ponto médio do intervalo X e $w(X) = |\bar{x} - \underline{x}|$ é o diâmetro do intervalo X ;

- Erro Relativo: $\left| \frac{x - m(X)}{x} \right| \leq \frac{w(X)}{2 \min|X|}$ se $0 \notin X$, onde $|X| = \{|X| : x \in X\}$.

Aplicam-se estas medidas de erros com o objetivo de verificar a qualidade do intervalo solução em diferentes ambientes intervalares, verificando qual ambiente retorna o intervalo com melhor qualidade, obtido para os indicadores estatísticos intervalares conforme definidos em LORETO (2006).

Para todas as simulações foi utilizado o mesmo computador com as seguintes configurações: processador Inter® Core™ i5 CPU 760 @ 2.80GHz Quad-Core, L1 Cache 64Kb, L2 Cache 512Kb, L3 Cache 8Mb, Memória RAM de 16GB DDR3 1333MHz, armazenamento HD Sata 500GB modelo ATA Samsung HD502HJ, sistema operacional Linux Ubuntu 11.10 (IntPy e C-XSC), Windows 7 Ultimate (IntLab e Maple).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os valores usados para a realização dos testes foram: 14.2687, 16.0697, 16.8786, 18.2961, 19.8179, 20.7834, 21.0517, 21.8146, 22.0711, 22.6562, 24.6094, 25.1095, 26.9127, 27.0258.

Na Tabela 1 encontram-se os resultados da comparação do valor real e o valor intervalar para diferentes ambientes intervalares.

Tabela 1: Valores reais e Intervalares

Indicador	Valores Reais	C-XSC	IntLab	Maple	IntPy
Média	21.2404	[21.235428, 21.245429]	[21.2354, 21.2455]	[21.2344, 21.2464]	[21.2403757142, 21.2403957142]
Mediana	21.4331	[21.428499, 21.438501]	[21.4284, 21.4386]	[21.4281, 21.4381]	[21.4331399999, 21.4331600000]
Ampl. Total	12.7571	[12.746999, 12.767001]	[12.7469, 12.7671]	[12.7471, 12.7671]	[12.7570799999, 12.7571200000]
Variância	14.3066	[14.2964, 14.3168]	[14.2442, 14.3677]	[14.2226, 14.3906]	[14.3065269110, 14.306772815]
Desvio Padrão	3.78241	[3.774184, 3.790438]	[3.7741, 3.7904]	[3.77361, 3.79121]	[3.78239697956, 3.78242948580]
Coef. Variação	0.178076	[0.177646, 0.178496]	[0.1776, 0.1785]	[0.17764, 0.17850]	[0.17807563618, 0.17807733425]
Covariância	5.151523	[5.105631, 5.197465]	[5.0946, 5.2040]	[5.08052, 5.22252]	[5.15140819363, 5.15163820792]
Coef. Correlação	0.645051	[0.6444621, 0.645481]	[0.6345, 0.6556]	[0.63763, 0.65247]	[0.64502883893, 0.64507392065]

Na Tabela 2 encontram-se os erros absolutos nos diferentes ambientes intervalares. Os valores em destaque nas Tabelas 2 e 3 mostram situações onde o intervalo gerado pelo ambiente não é um bom representante do valor estimado.

Tabela 2. Comparativo de Erro Absoluto nos ambientes intervalares

Indicador	C-XSC	IntLab	Maple	IntPy
Média	0.00004 < 0.005	0.00005 < 0.0050	0.00004 < 0.0050	0.0 < 0.00001
Mediana	0.00035 < 0.005	0.0003 < 0.0102	0.7633 < 0.0050	0.0 < 0.00001
Ampl. Total	0.0001 < 0.01	0.00005 < 0.0101	0 < 0.01	0.0 < 0.00002
Variância	0.00076 < 0.0662	0.00065 < 0.0617	0.0007 < 0.0662	$4 \times 10^{-10} < 0.0001$
Desvio Padrão	0.0001 < 0.00812	0.0001 < 0.0082	0.0001 < 0.0084	$2 \times 10^{-10} < 0.00006$
Coef. Variação	0.000005 < 0.0004	0.00005 < 0.0004	0.000005 < 0.0004	$1 \times 10^{-11} < 3 \times 10^{-6}$
Covariância	0.000025 < 0.0459	0.0022 < 0.0547	0.5039 < 0.0581	$1 \times 10^{-10} < 0.0001$
Coef. Correlação	0.00017 < 0.01732	0.00005 < 0.010	0.0563 < 0.0104	$2 \times 10^{-10} < 1 \times 10^{-5}$

Na Tabela 3 mostram-se os resultados dos diferentes ambientes intervalares para a medida de erro relativo.

Tabela 3. Comparativo de Erro Relativo nos ambientes intervalares

Indicador	C-XSC	IntLab	Maple	IntPy
Média	$0.000002 \leq 0.0002$	$0.000002 \leq 0.0002$	$0.000002 \leq 0.0002$	$0.0 \leq 4 \times 10^{-7}$
Mediana	$0.000016 \leq 0.0002$	$0.000013 \leq 0.0002$	$0.036250 \leq 0.0002$	$0.0 \leq 4 \times 10^{-7}$
Ampl. Total	$0.000007 \leq 0.0007$	$0.000003 \leq 0.0004$	$0. \leq 0.02$	$0.0 \leq 1 \times 10^{-6}$
Variância	$0.000049 \leq 0.0043$	$0.000045 \leq 0.0043$	$0.000049 \leq 0.0043$	$2 \times 10^{-11} \leq 8 \times 10^{-6}$
Desvio Padrão	$0.000026 \leq 0.0021$	$0.000026 \leq 0.0021$	$0.000027 \leq 0.0021$	$2 \times 10^{-11} \leq 8 \times 10^{-6}$
Coef. Variação	$0.000028 \leq 0.0023$	$0.000280 \leq 0.0025$	$0.000028 \leq 0.0023$	$3 \times 10^{-11} \leq 9 \times 10^{-6}$
Covariância	$0.000004 \leq 0.0089$	$0.000427 \leq 0.0107$	$0.097830 \leq 0.0103$	$2 \times 10^{-11} \leq 1 \times 10^{-5}$
Coef. Correlação	$0.000165 \leq 0.0170$	$0.000077 \leq 0.0166$	$0.097950 \leq 0.0168$	$8 \times 10^{-10} \leq 4 \times 10^{-5}$

Observa-se que o ambiente Maple Intervalar, em alguns indicadores estatísticos, apresentou maiores erros Absoluto e Relativo que os demais ambientes. Já o IntPy retornou intervalos solução mais exatos em todos os indicadores calculados.

4. CONCLUSÕES

Até o momento, foram pesquisados e definidos os ambientes intervalares, bem como as medidas de erros para verificação da qualidade dos intervalos solução, obtidos para os indicadores estatísticos intervalares da média, variância, desvio padrão, coeficiente de variação, covariância e coeficiente de correlação.

As opções pelos ambientes intervalares C-XSC, Maple Intervalar, IntPy e IntLab, para a realização deste trabalho, fundamenta-se na potencialidade de aplicações tanto na pesquisa quanto no ensino.

Com o sistema de ponto flutuante $F(10, 14, -10, 10)$ (ou com quatorze casas decimais) verifica-se, através das medidas de erros (absoluto e relativo), qual ambiente retorna intervalo solução com mais exatidão.

Garantindo a qualidade do intervalo solução e conhecendo o ambiente intervalar que retorna o intervalo com melhor qualidade, tem-se uma ferramenta intervalar confiável para ser utilizada em diversas aplicações que utilizem os indicadores estatísticos descritivos intervalares. A partir da escolha do ambiente intervalar pretende-se, em um trabalho futuro, desenvolver uma biblioteca estatística intervalar.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KLATTE, R, KULISCH, U., WIETHOFF, A., LAWOW, C., RAUCH, M. **C-XSC - A C++ Class Library for Extended Scientific Computing**. Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

KRÄMER, Walter. **Multiple/arbitrary precision interval computations in C-XSC**. Springer-Verlag, 2011.

KULISCH, U. and MIRANKER, L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**, 1st ed., Academic Press, 1981.

KULISCH, U. W. (2008, apr) Complete interval arithmetic and its implementation on the computer. [Online]. Disponível em: <http://www.math.kit.edu/iwrmm/seite/preprints/media/preprintn%20nr>

LORETO, Aline B. **Análise da Complexidade Computacional de Problemas de Estatística Descritiva com Entradas Intervalares**. Tese de Doutorado em PPGC, Instituto de Informática/UFRGS, Porto Alegre, 06/01/2006.

MAPLE Power Interval Arithmetic. Disponível em: www.math.uni-wuppertal.de/wrswt/software/intpakX.

MATLAB Intlab. Disponível em: www.mathworks.com.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimization**. Ellis Horwood, 1988.

INTPY. Interval Arithmetic package. Online. Disponível em: <https://pypi.python.org/pypi/IntPy/0.1.3>.