EXTENSÃO INTERVALAR PARA A ESPERANÇA DA PROBABILIDADE

LUCAS MENDES TORTELLI[1]; MARILINE LORINI[2]; ERICO ALVES GREHS[2]; MAURICIO DORNELES CALDEIRA BALBONI[2]; ALICE FONSECA FINGER[2]; ALINE BRUM LORETO[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – lmtortelli@inf.ufpel.edu.br,
[2]Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – {mlorini, eagrehs, affinger}@inf.ufpel.edu.br, baalbis@gmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – aline.loreto@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Os computadores empregam aritméticas chamadas de ponto flutuante. Nestas aritméticas, números reais são aproximados por um subconjunto finito de números reais. Devido a esta representação, erros podem ser gerados, uma vez que a máquina nem sempre é capaz de representar um número real com exatidão.

Erros podem ser originados a partir de arredondamentos ou truncamentos dos valores, onde acontece uma aproximação dos mesmos para gerar o resultado final. O acúmulo dos erros durante os resultados intermediários de uma computação podem produzir resultados inaceitáveis (RUGIERO, 2004).

A teoria intervalar definida por MOORE (1966) utiliza intervalos fechados para representar dados reais, com o objetivo de controlar os erros que ocorrem no processo computacional e retornar resultados mais exatos. Na matemática intervalar, o valor real x é aproximado por um intervalo $\mathbf{X}$, que possui como limites inferior e superior números de máquina de forma que o intervalo contenha x.

O tamanho deste intervalo pode ser usado como medida para avaliar a qualidade de aproximação (RATSCHEK, 1988).

A utilização da probabilidade e da esperança matemática tem grande impacto em cálculos estatísticos, uma vez que a probabilidade está ligada a ocorrência de diversos eventos aleatórios sobre uma população genérica (SCHEINERMAN, 2003). A probabilidade é constantemente utilizada em cálculos demográficos, físicos, estatísticos, químicos e entre outras áreas. A esperança matemática é uma estimativa dos resultados da probabilidade.

O presente trabalho tem como objetivo verificar se a esperança matemática definida através da matemática intervalar, juntamente com a probabilidade intervalar definida por CAMPOS (1997), retorna resultados mais exatos se comparados com a probabilidade real.

2. METODOLOGIA

Os valores obtidos para o cálculo de probabilidade são certificados através da esperança matemática, porém tais valores nem sempre são exatos, pois podem ser afetados por erros.

Segundo FERSON et al. (2002), historicamente o primeiro método para computar o intervalo solução é o método chamado de extensão intervalar. Nele repete-se a computação formando o programa passo-a-passo, substituindo cada operação elementar de números reais pela correspondente operação da aritmética intervalar.

O estudo da probabilidade é um ramo da matemática aplicado em diferentes áreas científicas. Pode-se citar, por exemplo, seu uso em censos demográficos, grandezas físicas, entre outras. A probabilidade intervalar proposta por CAMPOS (1997) resolve problemas numéricos associados com o cálculo de probabilidades reais. É realizada através de uma composição de funções, envolvendo extensões intervalares de funções reais.

Segundo CAMPOS (1997) a ideia de probabilidade intervalar (**iP**) consiste em dada uma probabilidade, um número real P(A) = p, onde p é substituído por um intervalo que o contém.

A esperança matemática necessita do espaço amostral s para realização de seus cálculos, portanto está relacionada com a probabilidade. Esperança matemática surgiu, principalmente, para ser aplicada a jogos de azar, pois é utilizada para calcular o resultado que poderá ser obtido a partir da probabilidade de ocorrência de cada evento, onde o resultado é chamado de número esperado ou esperança (SCHEINERMAN, 2003). Esperança é definida como um somatório dos produtos entre as amostrar e suas probabilidade específicas:

$$E(x) = \sum x(s).P(s), \qquad (1)$$

onde P(s) é a probabilidade amostral e s é a amostra.

Utilizando-se da extensão intervalar, pode-se modificar a Equação 1 para que a mesma suporte intervalos em sua fórmula geral. O valor real x é substituído pelo intervalo **X** de tal forma que $x_1 \leq x \leq x_2$:

$$E(x) = \sum \mathbf{X}(s).P(s) \qquad (2)$$

onde $\mathbf{X}=[x_1,x_2]$ é o intervalo de cada amostra do espaço amostral.

Substituindo-se na Equação 2 a probabilidade real pela intervalar, tem-se:

$$E(x) = \sum \mathbf{X}(s).\mathbf{iP}(s) \qquad (3)$$

Cálculos numéricos intervalares não podem ser implementados nas ferramentas de programação usuais, uma vez que estas trabalham com sistema aritmético real, utilizando-se de funções pré-definidas do sistema para não ocorrer *overflow* na representação numérica. Para um estudo mais científico que exige uma precisão ou aproximação mais eficiente é necessário a utilização de ambientes programáveis específicos para cálculos complexos, geralmente denominados XSC (*eXtended for Scientific Computation)* (KLATTE, 1993). O IntPy (INTPY) é uma biblioteca gratuita e *opensource* da linguagem de programação Python. Esta biblioteca contém diversas funções que preservam a integridade numérica como também define uma alta precisão aos intervalos trabalhados. Segundo VARJÃO (2012), o IntPy se caracteriza como uma base para a realização de cálculos intervalares, assim como para a análise da eficiência imprescindível na prática da computação científica, onde a qualidade de um resultado depende do conhecimento e do controle que se possa ter sobre seu erro.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O cálculo da esperança matemática definida na teoria intervalar, foi implementada no ambiente intervalar IntPy, utilizando como dados de entrada os

IMC (Índice de Massa Corporal) de uma turma da 5ª série, composta por 14 meninas, estes IMC's são 14.2687, 16.0697, 16.8786, 18.2961, 19.8179, 20.7834, 21.0517, 21.8146, 22.0711, 22.6562, 24.6094, 25.1095, 26.9127, 27.0258. A partir dos índices de entrada foi verificada a esperança real e intervalar do IMC desta turma utilizando uma precisão δ=0,00001, conforme descreve a Tabela 1:

Tabela 1: Comparação entre esperança real e intervalar

Método	**Esperança**	**Probabilidade**
Real	21.2403857143	0.07142857142857142
Intervalar	[21.237402061685696 ;21.24336936968573]	[0.07141857142857141; 0.07143857142857143]

Analisando-se os resultados obtidos na Tabela 1, verifica-se que o valor real está contido no intervalo solução. Para saber se o intervalo é considerado satisfatório, é preciso calcular sua qualidade de aproximação, conhecida como diâmetro, obtida através da fórmula $w(x) = x_2 - x_1 \geq 0$ (RATSCHEK,1988).

Na Tabela 2 são apresentados os resultados do diâmetro calculado sobre o intervalo solução da esperança e da probabilidade intervalar.

Tabela 2: Resultados obtidos dos diâmetros dos intervalos soluções.

	Diâmetro
Esperança	0.00596730800003
Probabilidade	0.00002000000000

Através dos intervalos soluções obtidos, nota-se que a qualidade é considerada boa, uma vez que os mesmos se encontram com um diâmetro pequeno, mantendo-se sempre próximo do valor real de suas soluções.

4. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi apresentar a utilização da esperança em cálculos matemáticos, justificar a importância da exatidão dos resultados e propor uma extensão intervalar para a forma real.

A escolha do IntPy como linguagem de programação intervalar para implementação da esperança e da probabilidade, deu-se através de alguns critérios, avaliados anteriormente em outros trabalhos, como: qualidade do intervalo; diâmetro do intervalo; tempo de execução e portabilidade.

Os resultados obtidos com a utilização da probabilidade e da esperança nas formas intervalares foram satisfatórios, uma vez que retornaram intervalos solução com qualidade. Salienta-se que quando se trabalha com computação numérica, um dos fatores de maior importância é a exatidão da resposta desses cálculos. O que sempre se procura são resultados cada vez mais exatos e com um menor erro possível contido neles.

Os resultados comprovam que a definição intervalar apresentada retorna como solução um intervalo que encapsula o valor real, resultado importante, o qual justifica o uso da matemática intervalar na resolução cálculos de probabilidade.

O estudo nessa área poderá garantir a confiabilidade de todos os resultados obtidos, tornando-os mais exatos, podendo ser aplicados em diferentes áreas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMPOS,M.A. **Uma Extensão Intervalar para a Probabilidade Real**. 1997. 127p. Tese (Doutorado em Informática) – Departamento de Informática/UFPE, Recife.

FERSON, S.I, GINZBURG, L., KREINOVICH, V. “**Absolute bounds on the mean of sum, product, etc.: A probabilistic extension of interval arithmetic**”, SIAM WORKSHOP ON VALIDATED COMPUTING, Toronto, 2002.

INTPY. Interval Arithmetic package. Online. Disponível em: https://pypi.python.org/pypi/IntPy/0.1.3.

KLATTE, R, KULISCH, U., WIETHOFF, A., LAWO, C., RAUCH, M. **C-XSC - A C++ Class Library for Extended Scientific Computing**. Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

LORETO, A.B; ***Complexidade computacional de problemas de estatistica descritiva com entradas intervalares***. 2006. 71f. Dissertação (Doutorado em Computação) - Curso de Pós-graduação em Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimization**. Ellis Horwood, 1988.

RUGIERO, M.A. G.; LOPES, V.L. R. **Cálculo Numérico: aspectos Teóricos e Computacionais.** 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2004.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta, Uma Introdução**. 1.ed. São Paulo: Thomson Learning, 2003.

VARJÃO, F. R. G. **IntPy: Computação científica auto validável em Pyth on.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Pernambuco.