INVESTIGAÇÕES NA CLASSE DE CONECTIVOS FUZZY *f*-XOR : DUALIDADE, ROBUSTEZ E IMPLICAÇÕES

ROSANA ZANOTELLI[1]; LUCIANA FOSS[1]; SIMONE CAVALHEIRO[1]; RENATA REISER[1]

[1] *Universidade Federal de Pelotas (PPGC-UFPel)*
{rzanotelli, lfoss, simone.costa, reiser}@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A Lógica Fuzzy descreve formalmente o senso comum e conhecimento especializado através de operadores e conectivos fuzzy. Neste trabalho, considera-se a composição de conectivos fuzzy como t-normas, t-conormas e negações que definem a classes de funções interpretando, no intervalo unitário U=[0,1], o conectivo “fuzzy exclusive or” (fuzzy Xor) e sua construção dual, o “fuzzy exclusive nor” (fuzzy XNor). Considera-se também a classe de implicações fuzzy explicitamente representada por tais conectivos e suas correspondentes coimplicações fuzzy, de acordo com HE et. al. (2013).

A classe dos conectivos fuzzy *f*-Xor reporta-se à equivalência clássica $\alpha \oplus \beta \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$, considerando-se como extensão fuzzy a definição dada em BEDREGAL et al (2013). Em particular, estuda-se a subclasse do conectivo fuzzy *f*-Xor definida pelo t-norma produto T_P, a soma algébrica S_P e a negação padrão N_S, focando-se na sua representação gráfica e construção N_S-dual. Como principal contribuição, introduzimos o estudo da robustez dos operadores da classe *f*-(*N*)Xor, analisando a sensibilidade nos pontos extremos do intervalo unitário U=[0,1] do conectivo fuzzy E_{T_P,S_P,N_S} e sua função dual.

2. PRELIMINARES

Primeiramente, reportam-se principais conceitos dos conectivos fuzzy.

2.1. Negações Fuzzy

Uma negação fuzzy N:U→U verifica as propriedades:

N1: N(0) = 1 e N(1) = 0 ; e

N2: Se x ≥ y então N(x) ≤ N(y), para todo x,y $\in U$.

Além disso, negações fuzzy forte satisfazem a propriedade involutiva:

N3: N(N(x)) = x, para todo x,y $\in U$.

A negação fuzzy forte de Zadeh é dada por $N_S(x) = 1 - x$.

2.2. Normas e Conormas Triangulares

Para todo x,y,z $\in U$, uma (co)norma triangular T(S):U→U, indicada por t-(co)norma, verifica as seguintes propriedades:

T1: T(1,x) = x;
T2: T(x; y) = T(y; x);
T3: Se x ≤ z então T(x,y) ≤ T(x,z);
T4: T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z).

S1: S(0,x) = x;
S2: S(x; y) = S(y; x);
S3: Se x ≤ z então S(x,y) ≤ S(x,z);
S4: S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z).

Consideram-se a t-conorma soma probabilística e t-norma produto, cujas expressões algébricas são $T_P(x,y)=xy$ e $S_P(x,y)=x+y-xy$, respectivamente.

2.3. Implicações e coimplicações fuzzy

Uma (co)implicação (J)**I:**U^2→U satisfaz as condições de contorno:

I1.I(0,0)= I(0,1)=I(1,1)=1 e I(1,0)=0; **J1**.J(0,0)=J(1,0)=J(1,1)=0 e J (0,1)=1.

3. METODOLOGIA

Os principais procedimentos metodológicos se referem ao estudo da extensão fuzzy dos conectivos Xor e sua construção dual, indicada por XNor. O estudo das (co)implicações fuzzy definidas por tais conectivos também contribuem para o desenvolvimento do trabalho.

3.1. Classe dos Conectivos Fuzzy *f*-X(N)or

A função E(D):$U^2 \to U$ é um conectivo fuzzy Xor (XNor) se, para todo $x,y \in U$:

E0: E(1,1) = E(0,0)=0 e E(1,0)=1; **D0:** D(1,1) = D(0,0)=1 e D(0,1)=0;
E1: E(x,y) = E(y,x); **D1:** D(x,y) = D(y,x);
E2(i): Se x ≤ y então E(0,x) ≤ E(0,y); **D2(i):** Se x ≤ y então D(0,x) ≥ D(0,y);
E2(ii): Se x ≤ y então E(1; x) ≥ E(1; y). **D2(ii):** Se x ≤ y então D(1,x) ≤ D(y,1).

Em BEDREGAL et. al. (2009), Proposição 3.4, se *T*, *S* e *N* denotam uma t-norma, uma t-conorma e uma negação fuzzy, respectivamente, a função $E_{T,S,N}(D_{S,T,N})$:$U^2 \to U$ é um conectivo fuzzy *f-Xor* (fuzzy *f-XNor*) dado por:

$E_{T,S,N}(x, y) = T(S(x, y),N(T(x, y)))$, $(D_{S,T,N}(x, y)=S(T(x, y),N(S(x, y))))$, $\forall x,y \in U$.

Se T_N e S_N são as correspondentes funções N-duais da t-norma T e t-conorma S, tem-se o fuzzy *f*-XNor $(E_{T,S,N})_N$:$U^2 \to U$ (fuzzy *f*-Xor $(D_{S,T,N})_N$:$U^2 \to U$) dada por Eq.:

$(E_{T,S,N})_N (x, y) = D_{T_N,S_N,N} (x, y)$ $((D_{S,T,N})_N (x, y) = E_{S_N,T_N,N} (x, y))$, $\forall x,y \in U$.

Proposição 1. O conectivo fuzzy *f*-Xor E_{T_P,S_P,N_S} (D_{S_P,T_P,N_S}) é dado pela expressão:

$E_{T_P,S_P,N_S}(x, y) = x + y - xy - x^2y - xy^2 + x^2y^2$

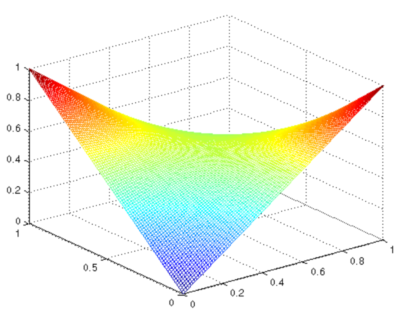
$(D_{S_P,T_P,N_S}(x, y) = 1 - x - y + xy + x^2y + xy^2 - x^2y^2)$, $\forall x, y \in U$.

A classe das funções fuzzy *f*-Xor (f-XNor) preserva a relação de dualidade.

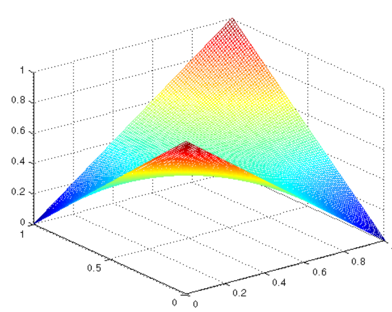
Proposição 2. Sejam os conectivos fuzzy E_{T_P,S_P,N_S} e D_{S_P,T_P,N_S}. *Então, tem-se que:*

$(E_{T_P,S_P,N_S})_{N_S}(x,y) = D_{S_P,T_P,N_S}(x, y)$ e $(D_{S_P,T_P,N_S})_{N_S}(x,y) = E_{T_P,S_P,N_S}(x, y)$, $\forall x, y \in U$.

Na Fig. 1, os gráficos das funções E_{T_P,S_P,N_S} e D_{S_P,T_P,N_S}, mutuamente duais.



(a) Fuzzy Xor E_{T_P,S_P,N_S}



(b) Fuzzy XNor D_{S_P,T_P,N_S}

Figura 1. Fuzzy *f*-Xor e fuzzy *f*-XNor obtido pela S_P, T_P e N_S.

3.2. Classe das (Co)Implicações *f*-X(N)or

Em BEDREGAL et. al. (2013), sejam T(S), N e E(D) uma t-(co)norma, uma negação fuzzy e um Xor (XNor), respectivamente. A função $I_{E,T,N}$ $(J_{D,S,N})$:$U^2 \to U$, chamada *f*-X(N)or (co)implicação fuzzy, é definida por

$I_{E,T,N}(x,y) = E(x,N(T(x,y)))$, $(J_{D,S,N}(x,y) = D(x,N(S(x,y))))$ $\forall x,y \in U$.

Adicionalmente, sejam N uma negação fuzzy forte, $(S_N)T_N$ e $(D_N)E_N$ são as funções N-duais da (t-conorma S) t-norma T e do (f-*XNor D*) f-Xor E. A função chamada N-dual da *f*-X(N)or (co)implicação $(I_{E,T,N})_N$ $((J_{D,S,N})_N)$: $U^2 \rightarrow U$ é dada por

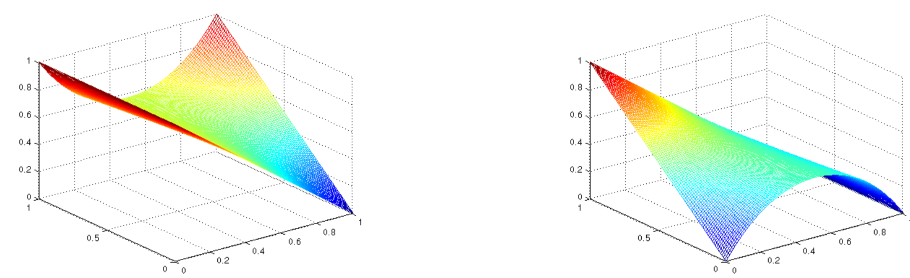
$((I_{E,T,N})_N(x, y) = J_{E_N,T_N,N}(x, y)$, $((J_{D,S,N})_N(x, y) = I_{D_N,S_N,N}(x, y))$, $\forall\, x,y \in U.$

Proposição 3. Se $S=S_P$, $T=T_P$ e $N=N_S$, a implicação f-Xor $I_{E(T_P,S_P,N_S),T_P,N_S}$ e sua correspondente coimplicação $J_{D(S_P,T_P,N_S),S_P,N_S}$, são respectivamente, dadas por

$I_{E(T_P,S_P,N_S),T_P,N_S}(x,y) = (1 - xy + x^2y)(1 - x + x^2y)$,

$J_{D(S_P,T_P,N_S),S_P,N_S}(x,y) = (x - (x - 1)^2(y - 1))((x - 1)(y - 1)+(x - 1)^2(y - 1) - 1)+1$, $\forall\, x,y \in U$.

Seguem os gráficos da *f*-Xor implicação $I_{E(T_P,S_P,N_S),T_P,N_S}$ e sua função N_S-dual, na fig.2



(a) Implicação Fuzzy *f*-Xor $I_{E(T_P,S_P,N_S),T_P,N_S}$ (b) (Co)implicação Fuzzy *f*-Xor

Figura 2. *f*-Xor implicação e *f*-XNor coimplicação obtido por E_{T_P,S_P,N_S} e D_{S_P,T_P,N_S}.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A principal discussão deste trabalho se refere à análise de sensibilidade dos conectivos fuzzy *f*-Xor e *f*-X(N)or, nos pontos terminais de U. Para tal, consideram-se f: $U^2 \rightarrow U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x,y) \in U^2$ e os seguintes resultados*:*

(i) Em LI et.al. (2005),Teorema 1, se f é monotônica ($x \leq x'$, $y \leq y'$ $\Rightarrow f(x,y) \leq f(x',y')$) então a sensibilidade de *f* no ponto **x** é dada pela expressão

$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = [f(x)-f((x-\delta)\vee 0, (y-\delta)\vee 0)] \vee [f((x+\delta)\wedge 1), (y+\delta)\wedge 1)-f(x)]$;

(ii) Em LI et al, (2005), Teorema 2, se a função f:$U^2 \rightarrow U$ é ordem reversa ($x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) então a sensibilidade de *f* no ponto **x** é dada pela expressão:

$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = [f(x)-f((x+\delta)\wedge 1)] \vee [f((x-\delta)\vee 0)-f(x)]$;

(iii) De acordo com REISER, BEDREGAL (2011), Teorema 1, se $N=N_S$ e f_N é a função N-dual de *f* então a sensibilidade de f_N no ponto **x** é dada pela expressão:

$\Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) = \Delta_f(N(x),\delta)$.

A sensibilidade de T_P e S_P nos pontos terminais de U são discutidas na seqüência:

Proposição 4. Sejam a t-norma T_P e a t-conorma S_P. Então, obtém-se que:

$\Delta_{S_P}((0,0),\delta) = 2\delta - \delta^2 = \Delta_{T_P}((1,1),\delta)$; $\Delta_{S_P}((1,1),\delta) = \delta^2 = \Delta_{T_P}((0,0),\delta)$;

$\Delta_{S_P}((0,1),\delta) = \delta = \Delta_{T_P}((1,0),\delta)$; $\Delta_{S_P}((1,0),\delta) = \delta = \Delta_{T_P}((0,1),\delta)$.

Adicionalmente**,** a sensibilidade de $E_{S_P;T_P;N_S}$ no ponto **x** é dada por

se $\mathbf{x} = (0, 0)$, $\Delta_{E_{S_P,T_P,N_S}}(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_{S_P}(\mathbf{x},\delta) - \Delta_{T_P}(\mathbf{x},\delta)$;

se $\mathbf{x} = (1, 1)$, $\Delta_{E_{S_P,T_P,N_S}}(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_{S_P}(\mathbf{x},\delta) + \Delta_{T_P}(\mathbf{x},\delta)$.

De acordo com a Proposição 4, apesar da classe de conectivos fuzzy X(N)or não verificarem a monotonicidade, um estudo da sensibilidade nos pontos terminais mostra que é possível analisar a robustez da subclasse Fuzzy Xor E_{T_P,S_P,N_S} a partir dos conectivos fuzzy que o definem, no caso pela par N_S-dual T_p e S_P . Resultados análogos podem ser verificados para a subclasse de implicações fuzzy *f*-Xor $I_{E(T_P,S_P,N_S)},T_P,N_S$ e suas construções duais.

5. CONCLUSÕES

O estudo de um membro da classe de conectivos fuzzy f-X(N)or, indicado pela expressão E_{T_P,S_P,N_S} (D_{S_P,T_P,N_S}) foi focado aqui, principalmente nas propriedades preservadas pela construção dual, incluindo a sua visualização gráfica.

A (co)implicação fuzzy correspondente $I_{E(T_P,S_P,N_S)},T_P,N_S$ foi também estudada, a partir de resultados referentes às funções: t-norma produto T_P, soma algébrica S_P e negação padrão N_S.

E alguns aspectos básicos relacionados à análise da robustez destes conectivos foram discutidos. Esta análise, embora restrita à sensibilidade das funções f-X(N)or nos pontos terminais do intervalo unitário U, vem colaborar com a área com novos resultados. Ressalva-se que tais conectivos binários não apresentam um comportamento monotônico em ambos argumentos, devendo portanto serem analisados ponto a ponto, principalmente nos pontos críticos ou nos extremos em U.

Na continuidade, tem-se a extensão intuicionista e o correlacionado estudo da sensibilidade na subclasse de conectivos fuzzy intuicionistas *f*-X(N)or e de fuzzy intuicionistas (co)implicações *f*-X(N)or.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LI, Y.; QIN, K.; HE, X. Fuzzy XNOR connectives in fuzzy logic, **Soft Computing**, v.15(12) p. 2457-2465, 2011.

HE, X.; LI Y.; QIN, K. On the associative property of fuzzy Xor connectives, **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, v. 25 (1) p. 1-7, 2013.

BEDREGAL, B.; REISER, R.; DIMURO, G. Revising XOR-implications: Classes of Fuzzy (Co)implications based on Fuzzy XOR (XNOR) connectives. **Intl. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowlegde-Based Systems,** v.14(6), p. 1-29, 2013.

BEDREGAL, B.; REISER, R.; DIMURO, G. Xor-implications and E-implications: classes of fuzzy implications based on fuzzy Xor, **Electronic Notes in Theoretical Computer Science, v.** 247, p. 5-18, 2009.

LI, Y.; LI, D.; PEDRYCZ, W.; WU, J. An approach to measure the robustness of fuzzy reasoning, **Intl. Journal of Intelligent Systems**, v.20(4), p. 393-413, 2004.

REISER, R.; BEDREGAL, B. Robustness of N-dual fuzzy connectives, In: **Advances in Intelligent and Soft Computing**, **EUROFUSE 2011**, (P. Melo-Pinto, P. Couto, C. Serôdio, J. Fodor and B. Baets, eds.) p. 79-90, Springer, Heidelberg, 2011.