UMA DEMONSTRAÇÃO DAS DIFERENÇAS DE FIBONACCI VIA RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA POR AUTOVALORES

MAURÍCIO DORNELES CALDEIRA BALBONI [1];
VINICIUS CARVALHO BECK [2].

[1] UFPEL - baalbis@gmail.com

[2] UAB/UFPEL - vonoco@gmail.com

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova demonstração para a fórmula das diferenças de Fibonacci, utilizando para isto, ao invés do princípio de indução (BORCHARDT; BECK; KREBS, 2012), as ferramentas descritas por GONZATTO JUNIOR et al. (2013), isto é, a resolução de equações de recorrência através da utilização de autovalores. Esta nova abordagem é uma alternativa ao emaranhado de cálculos apresentados por BORCHARDT; BECK; KREBS (2012), no trabalho precedente a este. Ressalta-se que a demonstração aqui apresentada é original e independente, não sendo do conhecimento dos autores a obtenção desta expressão, através das ferramentas matemáticas aqui utilizadas, em outros trabalhos científicos, fato pelo qual nenhuma referência relacionada a este desenvolvimento é apresentada. Adicionalmente, este trabalho também apresenta um roteiro para verificação numérica da fórmula, utilizando o software Scilab

Palavras-chave: diferenças. sequência de Fibonacci. ordem m. autovalores.

1. INTRODUÇÃO

Por volta de 1202, o matemático Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, publicou um famoso livro chamado “Livro dos Ábacos”. Dentre os vários problemas contidos neste livro, havia um muito interessante devido a sua estrutura de construção, a saber: “Quantos coelhos poderiam ser reproduzidos em um ano, a partir de um único casal, levando em consideração que cada coelho só pode reproduzir após um mês de idade, cada casal gera sempre outro casal de coelhos, e nenhum coelho morre durante o ano?”. Este problema é bastante artificial, mas a estrutura da sequência de números que expressa a população em cada mês é muito interessante. De acordo com as condições do problema, deduz-se que esta sequencia é dada por $(0,1,1,2,3,5,8,13,\dots)$, isto é, cada termo é a soma dos dois anteriores, começando por 0 e 1 (HUNTLEY, 1970).

Atualmente, muitos problemas envolvendo equações de recorrência, frequentemente encontrados na matemática discreta e suas aplicações, dentre as quais destaca-se a ciência da computação, utilizam a sequência de Fibonacci como passo inicial na formulação de problemas mais específicos. ALENCAR (2004) descreve algumas das inúmeras aplicações desta sequência de números aparentemente “inofensiva”.

Por se tratar de uma sequência muito importante na matemática, muitos estudos atuais envolvendo propriedades de sequências, acabam por utilizar a sequencia de Fibonacci como um exemplo inicial.

GONZATTO JUNIOR et al. (2013) apresentam a dedução da fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci, de termos F_n, onde $F_1 = 0, F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Chamamos de *números de Fibonacci* os números $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Os autores mostram que $F_n = \frac{\phi^n - (-\phi')^n}{\sqrt{5}}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

BORCHARDT; BECK; KREBS (2012), seguindo a metodologia de análise da diferença entre primos feita por SZPIRO (2004), KUMER; IVANOV; STANLEY (2007), propuseram uma fórmula geral para determinar termos de diferenças consecutivas da sequência de Fibonacci, tal como é apresentado nos próximos parágrafos.

A *Sequência das Diferenças da Sequência de Fibonacci* é uma sequência de termos d_n, onde $d_n = F_{n+1} - F_n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A *Sequência das Diferenças de ordem m da Sequência de Fibonacci* é uma Sequência de termos d_n^m, onde $d_n^0 = F_n$, $d_n^1 = d_n$ e $d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1}$ para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sendo assim, tem-se a fórmula para as diferenças de Fibonacci (BORCHARDT; BECK; KREBS, 2012): $d_n^m = \begin{cases} \frac{\phi^{n-m}-(-\phi\prime)^{n-m}}{\sqrt{5}}, \text{se } n \geq m \\ \frac{(\phi')^{m-n}-(-\phi)^{m-n}}{\sqrt{5}}, \text{se } n < m \end{cases}$. A demonstração da fórmula de BORCHARDT; BECK; KREBS (2012) foi feita utilizando-se o princípio de indução matemática em n e m.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova demonstração para a fórmula das diferenças de Fibonacci, utilizando para isto, ao invés do princípio de indução (BORCHARDT; BECK; KREBS, 2012), as ferramentas descritas por GONZATTO JUNIOR et al. (2013), isto é, a resolução de equações de recorrência através da utilização de autovalores. Esta nova abordagem é uma alternativa ao emaranhado de cálculos apresentados por BORCHARDT; BECK; KREBS (2012), no trabalho precedente a este. Ressalta-se que a demonstração aqui apresentada é original e independente, não sendo do conhecimento dos autores a obtenção desta expressão, através das ferramentas matemáticas aqui utilizadas, em outros trabalhos científicos, fato pelo qual nenhuma referência relacionada a este desenvolvimento é apresentada.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para demonstrar alternativamente a fórmula de BORCHARDT; BECK; KREBS (2012), em primeiro lugar, é estabelecida uma nova notação, menos carregada em relação ao trabalho precedente. Em segundo lugar, resolve-se a equação de recorrência gerada a partir da definição das diferenças de Fibonacci, calculando-se os autovalores e inserindo-os apropriadamente, na solução do problema de valor inicial induzido pela fórmula de recorrência da Sequência de Fibonacci, tal como GONZATTO JUNIOR et al. (2013), aqui no entanto, de forma generalizada. A principal dificuldade do problema está na resolução do sistema linear de duas equações gerado pelo problema de valor inicial. Os cálculos realizados na resolução deste problema são apresentados na próxima seção.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Consideremos a sequencia bi-indexada $\partial_m x_n$. Definimos a *Sequência das Diferenças de Ordem 0* ou *Sequência de Fibonacci*, como $\partial_0 x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$, com $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $n \geq 2$. Definimos a *Sequência das Diferenças de Ordem 1*, como $\partial_1 x_n = \partial_0 x_{n+1} - \partial_0 x_n$. Definimos a *Sequência das Diferenças de Ordem* m, como $\partial_m x_n = \partial_{m-1} x_{n+1} - \partial_{m-1} x_n$. Adotando esta nova notação, a fórmula de Binet, descrita por GONZATTO JUNIOR et al. (2013), assume a forma $\partial_0 x_n = \frac{\phi^n - (-\phi')^n}{\sqrt{5}}$, com $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Na demonstração do teorema enunciado a seguir, são empregadas duas propriedades elementares dos números ϕ e ϕ', facilmente demonstráveis por cálculo direto, que são as seguintes: $\phi + 1 = \phi^2$ e $(-\phi') + 1 = (-\phi')^2$.

Teorema: $\partial_m x_n = \left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|} \left(\frac{\phi^{|n-m|} - (-\phi')^{|n-m|}}{\sqrt{5}}\right)$.

Demonstração:

Primeiramente, vamos expressar a fórmula de recorrência da definição das diferenças de Fibonacci em notação matricial. Para isto, começamos deduzindo, por indução por exemplo, uma expressão generalizada para as sequências

$$\partial_0 x_n = (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584, \ldots)$$
$$\partial_1 x_n = (1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584, \ldots)$$

$$\partial_3 x_n = (2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597\ldots).$$

No entanto, procuramos uma expressão ainda em termos da sequência original, isto é, a sequência $\partial_0 x_n$. Intuitivamente, nota-se que as diferenças quando o índice do termo é maior do que ou igual ao índice da ordem, reproduzem a sequência de Fibonacci deslocada em m termos. Quando o índice da ordem é maior, temos, a sequência de Fibonacci "invertida", alternando o sinal.

Por indução matemática, pode-se mostrar que:

$$\begin{cases} \partial_m x_{n+1} = \left(sgn(n+1-m)\right)^{|n+1-m|} x_{n+1-m} \\ \partial_m x_n = \left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|} x_{n-m} \end{cases}$$, donde segue que

$$\begin{bmatrix} \partial_m x_{n+1} \\ \partial_m x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|} x_{n+1-m} \\ \left(sgn(n-1-m)\right)^{|n-m|} x_{n-m} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial_m x_{n+1}}{\left(sgn(n+1-m)\right)^{|n+1-m|}} \\ \frac{\partial_m x_n}{\left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1-m} \\ x_{n-m} \end{bmatrix} =$$

$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{n-m} \\ x_{n-1-m} \end{bmatrix}$. Isto caracteriza um problema de recorrência, cuja solução geral, segundo fórmulas conhecidas da matemática discreta e equações diferenciais, é dada por $\frac{\partial_m x_n}{\left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|}} = c_1 . {\lambda_1}^{|n-m|} + c_2 . {\lambda_2}^{|n-m|}$, onde λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz A, que representa a dinâmica da fórmula de recorrência.

Os autovalores da matriz A, neste caso, são ϕ e $-\phi'$, e a solução da equação de recorrência é $\frac{\partial_m x_n}{\left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|}} = c_1 . \phi^{|n-m|} + c_2 . (-\phi')^{|n-m|}$. Com as condições iniciais $\partial_0 x_n = \left(sgn(n)\right)^{|n|} \frac{\phi^n - (-\phi')^n}{\sqrt{5}}$ e $\partial_1 x_n = \left(sgn(n-1)\right)^{|n-1|} (\frac{\phi^{n-1} - (-\phi')^{n-1}}{\sqrt{5}})$, encontra-se $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, e obtém-se $\frac{\partial_m x_n}{\left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|}} = \frac{1}{\sqrt{5}} . \phi^{|n-m|} - \frac{1}{\sqrt{5}} . (-\phi')^{|n-m|}$. Finalmente, pondo em evidência $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e passando para o lado direito $\left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|}$, obtém-se a fórmula esperada, que é $\partial_m x_n = \left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|} (\frac{\phi^{|n-m|} - (-\phi')^{|n-m|}}{\sqrt{5}})$.

O ponto central deste trabalho, resumidamente apresentado no parágrafo acima, foi a determinação dos coeficientes c_1 e c_2. O detalhamento dos cálculos é apresentado a seguir. Considerando o problema de valor inicial, tem-se:

$$\begin{cases} c_1 \phi^n + c_2 (-\phi')^n = \partial_0 x_n \\ c_1 \phi^{n-1} + c_2 (-\phi')^{n-1} = \partial_0 x_{n-1} \end{cases}$$. Somando a primeira e a segunda equações acima, obtém-se:

$$c_1 \phi^n + c_1 \phi^{n-1} + c_2 (-\phi')^n + c_2 \left(-\phi'\right)^{n-1} = \partial_0 x_n + \partial_0 x_{n-1}$$
$$\Rightarrow c_1 \phi^{n-1} (\phi + 1) + c_2 (-\phi')^{n-1} \left(-\phi' + 1\right) = \partial_0 x_{n+1}$$
$$\Rightarrow c_1 \phi^{n-1} \phi^2 + c_2 (-\phi')^{n-1} \left(-\phi'\right)^2 = \partial_0 x_{n+1}$$
$$\Rightarrow c_1 \phi^{n+1} + c_2 (-\phi')^{n+1} = \partial_0 x_{n+1}$$
$$\Rightarrow c_1 \phi^{n+1} + c_2 (-\phi')^{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi')^{n+1}}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow c_1 \phi^{n+1} + c_2 (-\phi')^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\phi'\right)^{n+1}$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} .$$

A determinação dos coeficientes na equação de recorrência, apresentada acima, completa a demonstração da fórmula apresentada neste trabalho. No entanto, com o objetivo de conferir numericamente o resultado da pesquisa, foi produzido um pequeno script no software SCILAB (2013), que calcula diretamente os termos das diferenças de Fibonacci, através da fórmula apresentada. Para que o leitor tenha a oportunidade de conferir este resultado, este script é apresentado a seguir.

```
n=11;
m=6;
signal=1
fi=(1+sqrt(5))/2
fi2=(-1+sqrt(5))/2
if((n-m)>=0)
   signal=1
else
   signal=(-1)^(abs(n-m))
end
dif=signal*((fi^abs(n-m))-((-fi2)^abs(n-m)))/sqrt(5)
disp(dif)
```

Variando n e m, pode-se obter qualquer termo das diferenças. No caso do exemplo acima, com $n = 11$ e $m = 6$, obtém-se resultado 5, que é a diferença prevista pela fórmula aqui demonstrada.

4. CONCLUSÃO

Por fim, devido aos resultados utilizados e à demonstração apresentada acima, podemos concluir que $\partial_m x_n = \left(sgn(n-m)\right)^{|n-m|}\left(\frac{\phi^{|n-m|}-(-\phi')^{|n-m|}}{\sqrt{5}}\right)$. Portanto, neste trabalho apresenta-se uma alternativa para a demonstração de BORCHARDT; BECK; KREBS (2012), com uma nova notação para as diferenças e utilizando técnicas de matemática discreta, as quais eliminam a necessidade de separar o problema em vários casos, como no trabalho precedente, onde a principal técnica utilizada foi a indução matemática de segunda ordem. Adicionalmente, este trabalho também apresenta um roteiro para verificação numérica da fórmula, utilizando o software Scilab.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Maria Efigênia Gomes de. **O número ϕ e a sequência de Fibonacci**. Física na Escola, V.5, n. 2, 2004.

BORCHARDT, Thiago; BECK, Vinicius Carvalho; KREBS, Paulo Roberto. **A sequência das diferenças de ordem m da sequência de Fibonacci**. Anais do XXI Congresso de Iniciação Científica - UFPEL, Pelotas-RS, 2012.

GONZATTO JUNIOR, Oilson Alberto; PERIÇARO, Gislaine Aparecida; STURION, Elaine Cristina; SANTOS, Solange Regina dos. **Dedução da Fórmula de Binet por meio de Autovalores e Autovetores**. Anais do V Encontro Interdisciplinar de Educação, Campo Mourão- PR, 2013.

HUNTLEY, H. E..**The Divine Proportion: a study in mathematical beauty.** Dover Publications, New York, 1970.

KUMER, Pradeep; IVANOV, Plamen Ch.; STANLEY, H. Eugene. **Information Entropy and Correlations in Prime Numbers**. arXiv: cond-mat/0303110, October 18, 2007.

Scilab. Página web do software Scilab. 2013. Disponível em: <https://www.scilab.org/scilab/about>. Acessado em 06 Out. 2013.

SZPIRO, George G.. **The gaps between the gaps: some patterns in the prime number sequence**. Physica A 341 (2004) 607-617.