OBTENDO QL-IMPLICAÇÕES A PARTIR DE OPERADORES DE AGREGACÃO*

ÍBERO C. K. BENÍTEZ[1]; DIEGO PORTO JACCOTTET[1]; RENATA REISER[1], ADENAUER YAMIN[1]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – {ickbenitez,dpjaccottet,reiser,adenauer}@inf.ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Funções de agregação n-árias (FA) são operadores importantes na construção de sistemas de inferência fuzzy, frequentemente usados na geração de novas classes de conectivos fuzzy, as quais são aplicadas em diferentes áreas do raciocínio aproximado como o processamento de imagem, mineração de dados, reconhecimento de padrões, equações relacionais fuzzy e morfologia fuzzy, veja BELIAKOV et al. (2010), BELIAKOV et al (2012) e BUSTINCE et al. (2010). Entretanto, a preservação de propriedades como a associatividade, simetria e monotonicidade não é uma tarefa simples quando se consideram agregadores n--ários, sendo necessário considerar outras generalizações, como o princípio da troca, a associatividade generalizada e a distributividade.

Em REISER et al. (2013), foram investigadas as condições que garantem que a classe de t-sub(co)normas é preservada pela ação de agregadores, e por conseguinte, foram investigadas as classes de S-(sub)implicações e construções duais, neste contexto agregadas pela média aritmética. Com base nos resultados obtidos, este trabalho considera o agregador mediana, o qual é aplicado às famílias de t-(sub)conormas, t-(sub)normas e negações fuzzy, obtendo-se novas funções na classe das QL-(sub)implicações que também preservam suas principais propriedades e construções duais. As subclasses das t-normas produto e das somas probabilística provêm exemplos interessantes.

2. METODOLOGIA

Conceitos e propriedades de conectivos fuzzy são reportados, sendo o intervalo unitário indicado por $U = [0,1]$.

Uma **negação fuzzy** $N : U \longrightarrow U$ satisfaz as seguintes propriedades:
N1: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$; **N2 :** Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$, para todo $x, y \in U$.
Adicionalmente, negações fuzzy fortes que satisfazem a propriedade involutiva:
N3: $N(N(x)) = x$, para todo $x \in U$.

Uma função $I : U^2 \longrightarrow U$ é um subimplicador fuzzy se satisfaz as condições:
I0: $I (1,1) = I (0,1) = I(0,0)=1$;
Quando um subimplicador $I : U^2 \longrightarrow U$ também satisfaz a condição de contorno:
I1 : $I (1,0)=0$;
I é chamado de **implicador fuzzy**. E quando um (sub)implicador satisfaz:
I2: Se $x \leq z$ então $I (x,y) \geq I (z,y)$ (antitonicidade no primeiro argumento);
I3: Se $y \leq z$ então $I (x,y) \leq I (x,z)$ (isotonicidade no segundo argumento);
I4: $I (0,y) = 1$; I é denominado (sub)implicação fuzzy, veja mais detalhadamente em CORNELIS e DESCHRIJVER (2004). Ainda, uma outra propriedade a ser considerado no contexto deste trabalho é a do **princípio da troca**.
I5: $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$, para todo $x, y, z \in U$.

2.1 Funções de Agregação

*Este trabalho é financiado pelas agências de fomento: CAPES e FAPERGS.

Em BUSTINCE et al. (2010), uma função de agregação n-ária $A{:}U^n \longrightarrow U$ satisfaz:

A1: $A(0,0, \ldots ,0) = 0$ e $A(1,1, \ldots ,1) = 1$ (condições de contorno);

A2: Se $(x_1,x_2, \ldots ,x_n) \geq (y_1,y_2, \ldots ,y_n)$ então $A(x_1,x_2, \ldots ,x_n) \geq A(y_1,y_2, \ldots ,y_n)$ (monotonicidade);

A3: $A(x,x, \ldots ,x)=x$, para todo $x \in U$ (idempotência);

A4: Se $\{x_{1i}\}_{i \in N}$ é uma sequencia convergente então, para todo $x_2, \ldots , x_n \in U$, $\lim_{n\to\infty} A(x_{1i},x_2, \ldots ,x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_{1i},x_2, \ldots , x_n)$ (continuidade);

A5: Para todo $k \in\,]0, \infty[$ e $\alpha \in [0, \infty[$ tal que $\alpha^k x_1, \alpha^k x_2, \ldots , \alpha^k x_n \in U$, tem-se que $A(\alpha^k x_1, \alpha^k x_2, \ldots , \alpha^k x_n) = \alpha^k A(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ (k-homogeneity);

A6: $A(F(x,y_1), F(x,y_2), \ldots ,F(x,y_n)) = F(x,A(y_1, y_2, \ldots , y_n))$, para todo $x, y_2, \ldots , y_n \in U$ e toda função $F{:}\ U^2 \longrightarrow U$. (distributividade de A em relação a F).

Proposição 1. Seja σ uma função de permutação. Para todo $x_1, x_2, \ldots , x_n \in U^n$, a função de agregação **mediana,** indicada por $M : U^n \longrightarrow U$ e dada pelas expressões

(i) $M(x_1,x_2,\ldots, x_n) =$, se n é inteiro, ímpar e positivo;

(ii) $M(x_1,x_2,\ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left(x_{\sigma(n/2)}+x_{\sigma(n/2+1)}\right)$, caso contrário; (1)

verifica as propriedades **A3**, **A4** e **A5**.

2.3 Sub(co)normas Triangulares

Em KLEMENT et al. (2000), uma t-**sub(co)norma** é uma (FA) indicada por $(S)T : U^n \longrightarrow U$ tal que, $T(x,y) \leq min(x,y)$ $(S(x,y) \geq max(x,y))$ para $x,y \in U$ e verifica:

T1: $T(x,y)=T(y,x)$; **S1:** $S(x,y)=S(y,x)$ (comutatividade);

T2: $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$; **S2:** $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$ (associatividade);

T3: $T(x,z) \leq T(y,z)$, $se\ x \leq y$; **S3:** $S(x,z) \leq S(y,z)$, $if\ x \leq y$ (monotonicidade).

Uma t-(co)norma é uma t-sub(co)norma que também satisfaz a condição:

T4: $T(x,1) = x$; **S4**: $S(x,0)=x$ (elemento neutro).

Proposição 2. Para $i \geq 1$ e $x,y \in U$, $T_i\,(S_i) : U^2 \longrightarrow U$ dada pela expressão

$$T_i(x,y)=\left(\frac{1}{i}\right)xy \quad \left(S_i(x,y)=1-\frac{1}{i}(1-x-y+xy)\right). \qquad (2)$$

é uma t-sub(co)norma que não é t-(co)norma.

A função $I_{QL}(x,y){:}U^2 \longrightarrow U$ é denominada QL-implicação se existe uma t-(sub)conorma S, uma t-(sub)norma T e uma negação fuzzy N tal que:

$$I_{QL}(x,y)=S(N(x),\ T(x,y)),\ \text{para}\ x,y \in U. \qquad (3)$$

Denotamos $I_{QL}\,(J)$ por $I_{S,T,N}$.

Proposição 3. A função $J_i(x,y){:}U^2 \longrightarrow U$, $J_i(x,y)=1-\frac{1}{i}(x-x^2y)$ é uma *QL*-implicação.

Proposição 4. O operador J_i da Proposição 3 verifica **Ik**, para $\mathbf{k} \in \{0,3,4\}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

*Este trabalho é financiado pelas agências de fomento: CAPES e FAPERGS.

Esta sessão apresenta os resultados obtidos com agregação de t-(co)normas e de implicações, considerando conceitos e preservação de propriedades algébricas.

3.1 Agregação de Conectivos Fuzzy

Considere $A: U^n \longrightarrow U$ uma função de agregação e $C(F_i) = \{F_i : U^2 \longrightarrow U\}$ (classe de funções F), com $i \in \{1,2,..., n\}$,como uma família de funções binárias para o que segue. Em REISER et al. (2013), Prop. 5.1, se $A: U^n \longrightarrow U$ é uma FA, um $(A, \mathcal{F})$-operador indicado por $\mathcal{F}_A : U^n \longrightarrow U$, é definido pela composição

$$\mathcal{F}_A(x_1, \dots , x_n) = A(F_1(x_1, \dots , x_k), F_2(x_1, \dots , x_k), \dots , F_n(x_1, \dots , x_k)). \qquad (4)$$

Seja $A: U^n \longrightarrow U$ uma função de agregação e $(C(S_i))\ C(T_i) = \{ (S_i)\ T_i : U^2 \longrightarrow U) \}$, com $i \in \{1,2, \ \dots \ , \ n\}$, uma família de t-sub(co)normas. Então $(S_A)\ T_A$ é uma t-sub(co)norma sempre que $(S_i)\ T_i$ verifica **A6** e a **associatividade generalizada**, significando que para todo i, j tal que $0 \leq i, j \geq n$ e $x, y, z \in U$, temos:

$$S_i(x, S_j (y,z)) = S_i(S_j (x,y), z) \text{ e } T_i(x, T_j (y,z)) = T_i(T_j (x,y), z). \qquad (5)$$

Proposição 5. Sejam $C(T_i)$ e $C(S_i)$ famílias de t-subnormas e t-subconormas descritas na **Proposição 2**. Para todo $i, j \geq 1$, cada par $T_i , T_j \in C(T_i)$ e $S_i, S_j \in C(S_i)$ verifica a respectiva expressão na Eq.(5).

Proposição 6. Sejam $C(T)$ e $C(S)$ as correspondentes famílias

$$C(T_i) = \{\ T_i(x)=\frac{1}{i}xy \ : i \geq 1\} \text{ e } C(S_i) = \{\ S_i(x)=1-\frac{1}{i}(1-x-y+xy) : i \geq 1 \}. \qquad (6)$$

Os operadores $C(S_i)_M, C(T_i)_M : U^2 \longrightarrow U$ estão bem definidos se a mediana verifica **A6**.

Corolário 1. O operador $(C(S_i)_M)\ C(T_i)_M$ é uma t-sub(co)norma.

Proposição 7. (REISER et al. 2013, Prop. 5.5) Seja $A : U^n \longrightarrow U$ uma função de agregação e $C(I_i) = \{ I_i : U^k \longrightarrow U \}$, para $i \in \{1,2, \ \dots \ , n\}$, uma família de implicações fuzzy. $C(I_i)_A$ verifica **I5** quando a agregação M verifica **A6** e cada par I_i , $I_j \in \mathcal{F}$ verifica o **princípio da troca generalizado**:

$$I_i(x, I_j (y, z) = I_i (y, I_j (x,z)), \text{ para todo } x, y, z \in U \text{ e } 0 \leq i, j \geq n. \qquad (7)$$

3.2 Agregação de Fuzzy QL-implicações

Esta subseção introduz a classe advinda da agregação de QL-implicações obtidaspor t-subnormas, t-subconormas e a negação padrão.

Teorema 1. Seja $M : U^n \longrightarrow U$ o agregador mediana e $C(J_i)$ a família de todas as subimplicações J_i , $C(J_i)_M$ verifica **I0, I3** e **I4**.

Corolário 2. Seja $M : U^n \longrightarrow U$ o agregador mediana e $C(J_i) = \{J_i : U^k \longrightarrow U \}$, para $i \in \{1,2, \ \dots \ , n\}$, uma família de subimplicações dada por $J_i(x,y)=1-\frac{1}{i}(x-xy)$.

Então $C(J)_M$ é uma QL-implicação por:

$$C(J_i)_{C(S_i)_M, C(T_i)_M, N_S} = C(S_i)_M(N_S, C(T_i)_M(x, y)) . \qquad (8)$$

Portanto, a classe das QL-subimplicações é preservada pelo agregador mediana.

*Este trabalho é financiado pelas agências de fomento: CAPES e FAPERGS.

3. CONCLUSÃO

Como principal contribuição, este trabalho introduz a classe $C(J_i)$ de QL-subimplicações, a qual é obtida pela aplicação da mediana sobre $C(T_i)$ e $C(S_i)$, as correspondentes famílias de t-subnormas e t-subconormas $T_i(S_i)$ e a negação padrão N_S. Os resultados mostram que ambas construções são equivalentes: (i) agregar todas as t-sub(co)normas $T_i(S_i)$ e gerar $C(S_i)$ e $C(T_i)$, as quais pela composição com a negação definem a classe $C(J_i)$ de J_i QL-subimplicações; (ii) obter uma QL-subimplicação J_i expressa como uma composição de uma $T_i(S_i)$ t-sub(co)norma e uma negação fuzzy e então, agregar todas as QL-subimplicações pelo operador mediana. Por conseguinte, uma nova classe de QL-subimplicações é obtida, coincidindo com a classe $C(J_i)_M$. Resultados análogos em REISER et al. (2013) e BACZYNSKI et al. (2008) são descritos para (S,N)-implicações e R-implicações geradas pela agregação de t-sub(co)normas e negações fuzzy. Os principais resultados deste trabalho estão na Figura 1, a qual mostra que o operador mediana (M) preserva a classe das QL-subimplicações.

$$\begin{tikzcd}
C(N) \times C(T_i) \times C(S_i) \times A \arrow[r, "Eq.(4)"] \arrow[d, "Eqs.(3)"'] & C(N) \times C(T_i)_A \times C(S_i)_A \arrow[d, "Eq.(8)"] \\
C(I)_{S_i,T_i,N} \times A \arrow[r, "Eq.(4)"] & C(I_{S_i,T_i,N})_A
\end{tikzcd}$$

Figura 1 Diagrama comutativo entre classes de conectivos fuzzy

Na continuidade, outros operadores de agregação *n*-ários serão estudados para obtenção de outros conectivos fuzzy.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. (S,N)- and R-implications: A state-of-art survey. **Fuzzy Sets and Systems**, v.159, n.14, p. 1836 - 1859, 2008.

BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; FERNANDEZ, J. The median and its extensions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v.175, n.1, p. 36 - 47, 2011.

BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; JAMES, S. et al. Aggregation for atassanov's intuitionistic and interval valued fuzzy sets: the median operator. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v.20, n.3, p. 487 - 498, 2012.

BELIAKOV, G.; CALVO, T.; BAETS, B.; FODOR, J.; MESIAR, R. et al. A class of aggregation functions encompassing two-dimentional OWA operators. **Information Sciences**, v.180, n.10, p. 1977 - 1989, 2010.

CORNELIS, G.; DESCHRIJVER, E. K. Implications in a intuitionistic fuzzy and interval valued fuzzy set theory: construction, classification and application. **Intl. Journal of Approximate Reasoning**, v.35, n.1, p. 55 - 95, 2004.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E.. **Triangular Norms**. Dordrech, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. (livro)

REISER, R.; BEDREGAL, B.; BACZYNSKI, M. Aggregating fuzzy implications. **Information Sciences**, v.253, n.0, p. 126 - 146, 2013.
*Este trabalho é financiado pelas agências de fomento: CAPES e FAPERGS.