AGREGAÇÃO DE CONECTIVOS FUZZY S-XOR

ALEXANDRE LEMKE[1]; RENATA REISER[1]; ANDRÉ DU BOIS[1]; MAURÍCIO PILLA[1]
[1]Universidade Federal de Pelotas (PPGC-UFPEL)
{alemke, reiser, dubois, pilla}@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A lógica fuzzy possui hoje uma grande aceitação comercial e industrial devido à grande possibilidade de modelagem da incerteza em diferentes aplicações. Dentro da lógica fuzzy, os estudos de conectivos Xor, e sua construção dual XNor, podem ser aplicados em exigentes projetos de processamento de informações, dados e/ou imagens, e processos de decisão BUSTINCE et al (2010). Este trabalho considera os resultados apresentados em BEDREGAL et al. (2013), mas restringe-se o foco à classe de conectivos s-Xor, denotada por EST. Visando agregar classes de conectivos s-Xor, que preservem suas principais propriedades, construções dual e as relativas implicações fuzzy, introduz-se o conceito de conectivo fuzzy subXor.

Na lógica fuzzy, as operações de agregação são funções significativas que podem fazer a redução de um conjunto de números em uma única representação computacional. Estas operações são estudadas, por exemplo (PRADERA, 2013), no processamento de imagens para tomada de decisão ou de reconhecimento de padrões em aprendizagem de máquina. Neste artigo, classes fundamentais de fuzzy subXor são representadas através de funções de agregação. Também é introduzido um novo operador $\mathcal{E}$ n(A) através da agregação de conectivos s-subXor.

Usando uma metodologia de agregação para a classe de conectivos fuzzy s-subXor baseado na média aritmética, é apresentado um subconjunto de conectivos subXor como contribuição principal, de acordo com BEDREGAL, et al. (1999).

2. METODOLOGIA

O desenvolvimento deste trabalho considera estudos de propriedades e as definições básicas dos conectivos fuzzy, Para tal, seja U = [0,1] o intervalo unitário.

2.1. Negações Fuzzy

A negação fuzzy é uma função $N:U\rightarrow U$ [4] verificando as seguintes propriedades:

N1: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

N2: Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$, $\forall x,y \in U$.

Uma negações fuzzy é forte se verifica a propriedade involutiva:

N3: $N(N(x)) = x$, $\forall x,y \in U$.

Considera-se neste estudo, a negação fuzzy forte de Zadeh, dada por $N_S(x) = 1-x$.

2.2 Normas e Conormas Triangulares

A triangular t-(co)norma é uma função binária $T(S):U^2\rightarrow U$ [5], $\forall x,y,z \in U$, que verifica as seguintes propriedades KLEMENT et al. (2000):

T1: $T(1,x) = x$;
T2: $T(x; y) = T(y; x)$;
T3: Se $x \leq z$ então $T(x,y) \leq T(x,z)$;
T4: $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$.

S1: $S(0,x) = x$;
S2: $S(x; y) = S(y; x)$;
S3: Se $x \leq z$ então $S(x,y) \leq S(x,z)$;
S4: $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$.

Consideram-se a t-conorma soma probabilística e a t-norma produto, dadas pelas respectivas expressões: $T_P(x,y)=xy$ e $S_P(x,y)=x+y-xy$, $\forall x,y \in U$, KLEMENT; NAVARRA (1999).

Dada uma uma negação fuzzy N. A função N-dual de $f{:}U^n \to U$ é definida por:

$$f_N(x_1, \dots, x_n) = N(f(N(x_1), \dots, N(x_n))),\ \text{para todo}\quad x_1, \dots, x_n \in U . \qquad (1)$$

A t-norma produto T_P e a soma probabilística S_P são funções mutuamente duais.

2.4 Função de Agregação

Em [3], uma agregação n-ária é uma função A: $U^n \to U$, verifica para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U^n$, as seguintes condições:

A1: $A(0, 0, \dots, 0) = 0$ e $A(1, 1, \dots, 1) = 1$;
A2: Se $x_i \le y_i$, para todo $0 \le i \le n$, então $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \le A(y_1, y_2, \dots, y_n)$;
A3: $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn})$ sendo s: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ é uma s-permutação;

Este artigo considera como funções de agregação a média aritmética:

$$A : U^n \to U ,\ A(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1/n\ (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \qquad (2)$$

2.5 Classe dos conectivos fuzzy $E_{S,T}$ e $D_{T,S}$

Uma função E(D):$U^2 \to U$ é um fuzzy subXor (subXNor) se, para $x,y \in U$:

E0(i): $E(1,1) = E(0,0)=0$;
E0(ii): $E(1,0)=1$;
E1: $E(x,y) = E(y,x)$;
E2(i): Se $x \le y$ então $E(0,x) \le E(0,y)$;
E2(ii): Se $x \le y$ então $E(1,x) \ge E(1,y)$.

D0(i): $D(1,1) = D(0,0)=1$;
D0(ii): $D(0,1)=0$;
D1: $D(x,y) = D(y,x)$;
D2(i): Se $x \le y$ então $D(0,x) \ge D(0,y)$;
D2(ii): Se $x \le y$ então $D(1,x) \le D(y,1)$.

A função $N_E : U \to U$, onde $N_E(x) = E(1,x)$, é uma negação fuzzy subjacente ao Xor fuzzy E. Adicionalmente, sejam as propriedades extras para um Xor fuzzy E:

E3: $E(x,x) \neq 1$;
E4: $E(x,0) = x$;
E5: Se $E(x,y) = 1$ então $(x = 1$ e $y = 0)$ ou $(x = 0$ e $y = 1)$;
E6: Se $E(x,y) = 0$ então $(x = 1$ e $y = 1)$ ou $(x = 0$ e $y = 0)$;
E7: N_E é uma negação fuzzy forte.

Sejam T, S e N uma t-norma, uma t-conorm e uma negação fuzzy, respectivamente. A função $E_{S,T}$ $(D_{T,S})$: $U^2 \to U$, é um conectivo Xor (XNor) fuzzy, chamado neste artigo como um **conectivo s-X(N)or fuzzy**, dada por:

$$E_{S,T}(x,y) = S(x,y) - T(x,y), \qquad (4)$$
$$D_{T,S}(x,y) = N(N(T(x,y)) - N(S(x,y)),\ \forall x, y \in U . \qquad (5)$$

Além disso, em [1], assegura-se que $N_{E_{S,T}}(x) = E_{S,T}(1,x) = N(x),\ \forall x \in U$.

Proposição 1. Se $T = T_P$, $S = S_P$ e $N = N_S$, então $E_{S,T}$ $(D_{T,S})$: $U^2 \to U$ é dada por:

$$E_{S_P,T_P}(x,y) = x + y - 2xy \qquad (6)$$
$$D_{T_P,S_P}(x,y) = 1 - x - y + 2xy;\ \forall x, y \in U. \qquad (7)$$

Na Fig. 1, a representação gráfica das funções E_{S_P,T_P} e D_{T_P,S_P}.

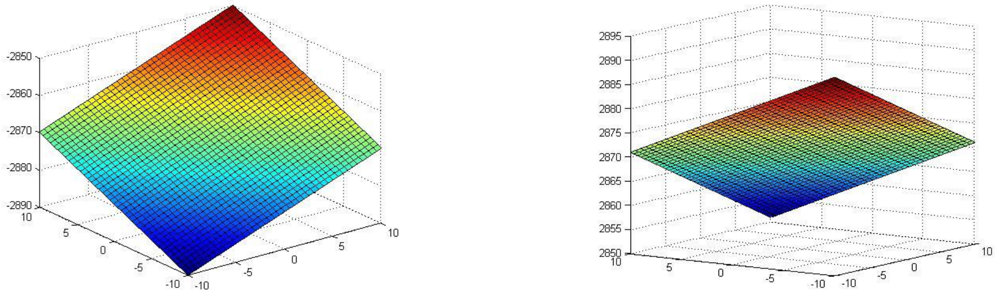

Figura 1. Conectivos s-Xor e s-XNor fuzzy.

Proposição 2. $E_{SP,TP}$ satisfaz as propriedades de E3 até E7.

2.6 Classes de Implicação e-Xor

O estudo de implicações fuzzy e sua construção dual (coimplicações fuzzy) se justifica principalmente por causa de suas potenciais aplicações, devendo preservar as condições verificads pela implicação clássica. (J)**I:**$U^2 \to U$ satisfaz as condições:

I0: I(0,0)= I(0,1)=I(1,1)=1 e I(1,0)=0 **J0**: J(0,0)=J(1,0)=J(1,1)=0 e J(0,1)=1.

Propriedades extras de uma implicação estão na sequência. Propriedades análogas pode ser aplicadas para o caso dual das coimplicações fuzzy.

I1: I(1,x) = x; **J1:** J(0,x) = x;
I2: N(x) = I(x,0) é negação fuzzy forte; **J2:** N(x) = J(x,1);
I3: I(0,x) = 1. **J3:** J(1,x) = 0.

Baseado no Xor (Xnor) fuzzy introduzido em [2], uma nova classe de fuzzy (co)implicações, as implicaçoes eXor (coimplicações eXNor) é estudada, com base na equivalência clássica: $\alpha \to \beta \equiv \sim\alpha \vee (\sim\alpha \text{ Xor } \beta)$.

Sejam T(S), N e E(D) uma t-(co)norma, uma negação fuzzy e um Xor (XNor) fuzzy, respectivamente. A função $I_{S,N,E}(J_{D;T;N}) : U^2 \to U$ é uma (co)implicação fuzzy, chamada implicação sXor (coimplicação sXNor) fuzzy:

$$I_{E,S,N}(x,y) = E(x,S(N(x),N(y))); \quad (8)$$
$$J_{D,T,N}(x,y) = D(x,T(N(x),N(y))), \ \forall x,y \in U. \quad (9)$$

Além disso, $N_I : U^2 \to U$, $N_{I_{E,S,N}}(x) = I_{E,S,N}(x; 0)$ é a negação fuzzy subjacente a $I_{E,S,N}$.

Proposição 3. Quando $S = S_P$, $N = N_S$ e $T = T_P$, entao:

$$I_{E_{SP,TP},SP,NS}(x,y) = 1 - x - xy + 2x^2y; \quad (10)$$
$$J_{D_{TP,SP},TP,NS}(x,y) = y - 2x + xy + 2x^2 - 2x^2y, \ \forall x,y \in U. \quad (11)$$

Proposição 4. A função $I_{E_{SP,TP},SP,NS}$ ($J_{D_{TP,SP},TP,NS}$) mostrada em Eq(10) e Eq.(11), satisfaz as propriedades **I1** (**J1**), **I2** (**J2**) e **I3** (**J3**).

Proposição 5. $I_{E_{SP,TP},SP,NS}$ e $J_{D_{TP,SP},TP,NS}$ são mútuas funções N_S dual:

$$(I_{E,S,N})_N(x,y) = J_{E_N,S_N,N}(x,y) = J_{D,T,N}(x,y); \quad (12)$$
$$(J_{D,T,N})_N(x,y) = I_{D_N,T_N,N}(x,y) = I_{E,S,N}(x,y), \ \forall x,y \in U. \quad (13)$$

Na Fig. 2, a representação gráfica das funções $I_{E_{SP,TP},SP,NS}$ e $J_{D_{TP,SP},TP,NS}$.

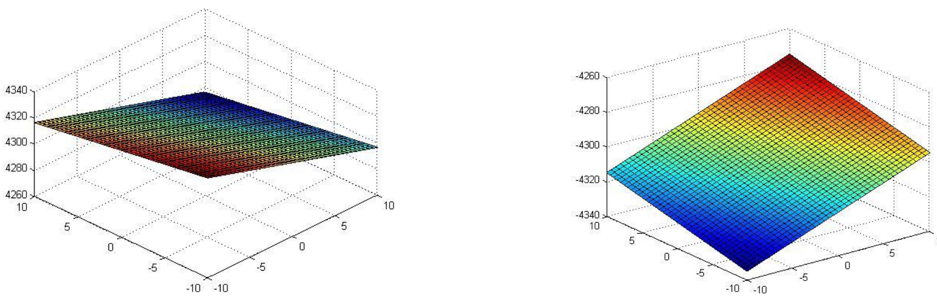

Figura 2. s-Xor implicação e s-XNor coimplicação obtido por $E_{SP,TP}$ e $D_{TP,SP}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. Agregando Conectivos s-Xor Fuzzy

Nesta seção, focando na classe s-Xor, mostra-se que uma função de agregação preserva na classe dos conectivos s-Xor fuzzy quando tem-se um subconjunto finito $\mathcal{E}_n = \{E_1, \ldots, E_n\}$ de conectivos s-subXor fuzzy. Para isso, consideramos a função binária $E_i : U^2 \to U$ definida por

$$E_i(x;y) = 1 - 1/i\,(1 - x - y + 2xy),\ \forall x,y \in U,\ i \geq 1. \quad (14)$$

Denominado por E, a família de todos E_i é mostrada na Eq.(14).

Definição 1. Temos $A : U^n \to U$, sendo uma agregação n-aria e $\mathcal{E}_n = \{E_1, \ldots, E_n\}$ subconjunto finito de conectivos s-subXor fuzzy em X. Tomando $k_1, \ldots, k_n \leq 1$, a função $\mathcal{E}_n(A) : U^2 \to U$, **chamada operador $\mathcal{E}_n(A)$**, é definida por

$$\mathcal{E}_n(A)(x,y) = A(X_{k_1}(x,y), \ldots, (X_{k_n}(x,y));\ \forall (x,y) \in U^2 \quad (15)$$

Proposição 6. Para $x\ y \in U$ e $i \geq 1$, uma função binária $E_i : U^2 \to U$ definida pela Eq.(14) verifica as propriedades E0(ii), E1, E2(i), E2(ii), E3, E4, E5 e E6. Adicionalmente, função $E_i : U^2 \to U$ definida pela Eq.(14) é um subXor fuzzy

Proposição 7. Seja $A : U^n \to U$ a média aritmética dada pela Eq.(2). A função $E_{18/11}$: $U^2 \to U \in X$, chamada operador $\mathcal{E}_3(A)$ e dada pela expressão:

$$\mathcal{E}_3(A)(x,y) = A(E_1(x,y), E_2(x,y), E_3(x,y)) = E_{18/11}(x,y). \quad (16)$$

é um membro da classe dos conectivos s-subXor fuzzy.

4. CONCLUSÕES

Neste artigo, estudamos a classe de conectivos fuzzy s-Xor, suas propriedades, construções dual e as correspondentes implicações fuzzy. Baseado nestes estudos, o conceito de conectivo subXor fuzzy foi introduzido.

A principal contribuição deste trabalho é uma metodologia de agregação para conectivos s-subXor fuzzy, baseado na agregação de um subconjunto de conectivos s-subXor fuzzy. Os conectivos s-Xor e suas relações de implicação podem ser aplicadas em trabalhos futuros que integra a pesquisa em simulação quânticas de conectivos fuzzy MARON et al (2013).

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEDREGAL B.; REISER R.; DIMURO G. Xor-implications and E-implications: classes of fuzzy implications based on fuzzy Xor, **Electronic Notes in Theoretical Computer Science,** v.247, p.5-18, 2009.

BEDREGAL B.; REISER R.; DIMURO G. . Revising XOR-implications: Classes of Fuzzy (Co)implications based on Fuzzy XOR (XNOR) connectives, **Intl. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowlegde-Based Systems,** v.14, n.6, p.1-29, 2013.

BUSTINCE H.; CALVO T.; BAETS B.; FODOR J.; MESIAR R.; MONTERO J.; PATERNAIN D; PRADERA A. A class of aggregation functions encompassing twodimensional OWA operator, **Inf. Sciences**, v.180, n.10, p.1977-1989, 2010.

KLEMENT E.; MESIAR R.; PAP E. **Triangular Norms**,Dordrecht, Kluwer Pub., 2000.

KLEMENT E.; NAVARA M. A survey on diferent triangular norm-based fuzzy logics, **Fuzzy Sets and Systems,** v.101, p.241-251, 1999.

MARON, A., VISINTIN, L., REISER, R. KERINOVICH, V. Aggregation operations from quantum computing, In: FUZZ IEEE 2013, v.1, p. 1-8, 2013.

PEDRYCZ W.; SUCCI G. fXOR fuzzy logic networks, **Soft Computing,** v.7, p.115-120, 2002.

PRADERA A. A Review of the Relationships between Aggregation, Implication and Negation Functions, Aggregation Functions in Theory and in Practice – **Advances in Intelligent Systems and Computing**, v.28, p.31-36, 2013.