O NÚMERO DE EULER

LEONARDO DUARTE SILVA[1];JANICE NERY[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – leonardoufpel@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – janice@mat.ufrgs.br*

1. INTRODUÇÃO

O Número de Euler é uma das constantes mais importantes do Cálculo, devido a quantidade de resultados que se remetem a operações envolvendo esse número. Sua importância se faz presente e se consolida nas ciências, muitas vezes sendo relacionado ao estudo de fenômenos de rápido crescimento, como na Biologia por exemplo.

O presente trabalho se propõe a formalizar algumas definições e proposições a respeito do Número de Euler com bastante rigor, diferentemente da forma como é tratado nas disciplinas de Cálculo, onde o objetivo maior não é o envolvimento com todo o conteúdo teórico. Com isso, esse estudo tende a complementar a formação do graduando, no sentido que aprofunda os seus conhecimentos. Esse aprofundamento é feito sob a ótica da Introdução a Análise Matemática, já que todas as proposições envolvidas são demonstradas.

A justificativa para o trabalho se dá não somente pelo sucesso ao definir o Número de Euler com definições equivalentes através de sequências e séries numéricas, mas também pela importância do trabalho matemático como um todo, já que para alcançar o objetivo maior, vários conceitos e resultados fundamentais da Matemática foram relacionados. Dentre esses podemos destacar, por exemplo, as Progressões Geométricas, o Binômio de Newton, a Indução Matemática, a Desigualdade de Bernoulli, Testes de Comparação para Sequências e Séries Numéricas, entre outros clássicos referente a esta teoria.

2. METODOLOGIA

O desenvolvimento do trabalho aconteceu durante o semestre 2013/1 do calendário acadêmico da Universidade Federal de Pelotas, através de um estudo contínuo, contando com encontros semanais com a professora orientadora, onde as proposições e resultados foram discutidos e formalizados.

Foi priorizado durante os encontros, o esforço intelectual para a resolução dos desafios, pois entende-se que o profissional que pesquisa matemática precisa dessa característica de insistência, tentativas e persistência na busca por soluções, para depois recorrer a outros métodos para vencer os desafios propostos.

Além disso, após boa parte dos resultados estarem compreendidos, esclarecidos e dominados, foi dispendido um tempo para formalização da escrita científica do trabalho, através de um editor para textos científicos da área das exatas, o LaTex.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho todos os resultados foram demonstrados e seria bastante interessante apresentar aqui todas as suas demonstrações. Contudo, devido ao modelo de submissão proposto, nos reservamos a enunciar todos e apresentar as demonstrações apenas dos mais relevantes.

No que segue, todas as sequências e séries numéricas são consideradas de números reais. Também, quando se trata apenas da convergência de alguma série numérica, $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$, onde k é um número natural, e não de sua soma, é comum escrevermos apenas $\sum a_n$. Esta questão esta apoiada no resultado:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e sua soma é S se, e somente se, para cada número natural k, $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ é convergente, e $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})$.

3.1 Preliminares

Provamos, por Indução Matemática, as duas importantes desigualdades abaixo:

- $n! > 2^{n-1}$; $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$.
- Desigualdade de Bernoulli: $(1+x)^n > 1 + nx\,;\, x \in \mathbb{R}, x > -1$ e $x \neq 0\,;\, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

3.2 A convergência da sequência $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Provamos que a sequência$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente demonstrando que ela é estritamente crescente e limitada, conforme resultado clássico de Análise.

3.3 O Número de Euler

Definição

O número real L tal que $L = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ chama-se *Número de Euler* e é denotado por e. Notação: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Lema (Uma conseqüência do Teorema do Confronto)

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de números reais, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Proposição 1 (O número e como soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

Prova

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ e $b_n = S_n - a_n$.
Observemos que para a conclusão da Proposição 1, basta mostrar que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.
Note que, usando o Binômio de Newton no desenvolvimento de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = S_n - a_n =$$

$$= \left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) - \left(1+1+\frac{1}{2!}\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left(1-\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right)\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right)\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{n^2 - n(n-1)}{n^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n^3 - n(n-1)(n-2)}{n^3}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{n^n - n!}{n^n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{n^2 - n(n-1)}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n^3 - n(n-1)(n-2)}{n^2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{n^n - n!}{n^{n-1}}\right)\right].$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, anotemos $c_n = \frac{1}{2!}\left(\frac{n^2-n(n-1)}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n^3-n(n-1)(n-2)}{n^2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{n^n-n!}{n^{n-1}}\right)$. Como para cada $n \in \mathbb{N}, b_n = S_n - a_n = \frac{1}{n} \cdot c_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada concluímos, pelo Lema acima, que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot c_n = 0$.

Proposição 2 (Irracionalidade de e)
e é um número irracional.

Prova
Suponhamos que e é um número racional e, portanto, escrevemos $e = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$.
Sabemos que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$ e, portanto,

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Daí $e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
Note que

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots = \frac{1}{(q+1)!}\left(1 + \frac{1}{(q+2)} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \cdots\right) <$$
$$< \frac{1}{(q+1)!}\left(1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+1)} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{(q+1)!}\left(1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right).$$

Observe que $1 + + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots$ é uma série geométrica de primeiro termo igual a 1 e razão $\frac{1}{q+1}$. Portanto $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{\frac{q}{q+1}} = \frac{q+1}{q}$.
Logo, $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{(q+1)!}\left(\frac{q+1}{q}\right) = \frac{1}{(q+1)q!}\left(\frac{q+1}{q}\right) = \frac{1}{q!q}$.
Isto é, $0 < e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!q}$, ou seja, $0 < \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!q}$.
Multiplicando os membros da desigualdade por $q!\,q$, obtemos
$0 \cdot q!\,q < q!\,q\,\left(\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{q!q} \cdot q!\,q$, e daí $0 < pq! - q\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} < 1$.
Observe agora que $pq! \in \mathbb{N}$. Além disso, $q\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = q\left(\frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{n!}\right)$.
Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq q$, temos que $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. Portanto, $q\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} \in \mathbb{N}$. Mas, $0 < pq! - q\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} < 1$ e $pq! - q\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} \in \mathbb{Z}$, é um absurdo.
Logo, e é um número irracional.

3.4 Uma nota importante

Acredita-se que o matemático John Napier tenha sido o primeiro a se referir ao Número de Euler em seus estudos sobre logaritmos, utilizando tal constante como base de logaritmo. Porém fez isso sem fazer a representação do número e, que só passou a ser representado explicitamente nos estudos relacionados com juros de Jakob Bernoulli. Contudo, o número recebeu o nome do matemático suíço Leonhard Euler pela grande quantidade de estudos e resultados que este obteve ao estudar as propriedades do referido número. Credita-se também a Euler a notação e para esta constante, possivelmente com alusão à palavra *exponencial*.

A título de curiosidade, uma aproximação do número e com vinte decimais é dada por $e \cong 2{,}71828182845904523536$. Em 1884, J.M. Boormann, publicou na revista *Mathematical Magazine,* volume 1, número 12, um valor aproximado de e com 346 algarismos decimais. Hoje em dia, com recursos computacionais, o Número de Euler é obtido com aproximações na ordem de milhões de algarismos.

4. CONCLUSÕES

Pode-se dizer que o trabalho obteve êxito por relacionar vários resultados da teoria de sequencias e séries numéricas para obter através de definições equivalentes duas caracterizações para o Número de Euler, uma através de sequências e outra através de séries numéricas. Apesar de não apresentar nenhum resultado inédito, a validade e beleza do trabalho está na coerência lógica da estrutura do formato apresentado.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FULKS, W. **ADVANCED CALCULUS – An Introduction to Analysis**. New York: John Willey & Sons Inc., 1967.

MAIA, L. P. M. **Cálculo 1.** Rio de Janeiro: UFRJ, 1978.

SPIVAK, M. **Calculus – Cálculo Infinitesimal.** Barcelona: Editorial Reverté, 1970.