

## DESEMPENHO DOS MÉTODOS DOS MOMENTOS E DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA NA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GAMA II

PAMELA BILHAFAN DISCONZI<sup>1</sup>; GISELE MACHADO DA SILVA<sup>1</sup>; ROSIANE  
SCHWANTZ DO COUTO<sup>1</sup>; RITA DE CÁSSIA FRAGA DAMÉ<sup>2</sup>; CLAUDIA  
FERNANDA ALMEIDA TEIXEIRA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Manejo e Conservação do Solo e a Água/MACSA/UFPEL –  
pamela\_bilhafan@yahoo.com.br; giselesilva@cavg.ifsul.edu.br; couto.rosianes@gmail.com

<sup>2</sup>Centro de Engenharias/CEng/UFPEL – ritah2o@hotmail.com; cfteixeira@ig.com.br

### 1. INTRODUÇÃO

A distribuição Gama tem sido bastante utilizada em estudos de predição pluviométrica e seu uso se deve ao fato de que as precipitações, sob o ponto de vista estatístico, não são distribuídas uniformemente em torno do valor médio, mas sim, de maneira irregular, com grande desvio em relação a este valor (KREPPER et al., 1989).

A função gama de probabilidade apresenta dois parâmetros: o de forma ( $\alpha$ ) e o de escala ( $\beta$ ) (SAMPAIO et al., 2007). Segundo BOTELHO; MORAIS (1999), o grande problema encontrado em trabalhos que envolvem a distribuição gama é a estimativa dos referidos parâmetros, devido à complexidade e extensão dos cálculos envolvidos. Vários métodos podem ser usados, como o método dos quadrados mínimos, o método dos momentos e o da máxima verossimilhança, porém todos possuem limitações, seja por problemas matemáticos ou por produzirem estimativas ineficientes. Entretanto, os métodos da verossimilhança e dos momentos são os mais comumente utilizados, mas, segundo THOM (1958), deve-se preferir o da máxima verossimilhança em virtude das suas melhores propriedades. Apesar da recomendação, o método dos momentos é largamente utilizado para ajustar distribuições de frequências em climatologia, mas são casos excepcionais as situações em que ele se mostra totalmente eficiente para estimar parâmetros climatológicos.

O presente trabalho busca realizar uma análise comparativa entre os métodos dos momentos e o da máxima verossimilhança na estimativa de parâmetros da distribuição contínua de probabilidade Gama de dois parâmetros, no ajuste dos valores da precipitação total mensal anual da localidade de Caçapava do Sul/RS.

### 2. METODOLOGIA

Foram utilizados os totais mensais anuais de precipitação pluvial da estação agroclimatológica de Caçapava do Sul/RS, localizada nas coordenadas 30°30'S e 53°29'W, e altitude de 450 m, pertencentes ao Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), no período de 1913 a 2002.

Foi utilizada a distribuição Gama com dois parâmetros, cuja função densidade de probabilidade é dada pela equação 1.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (1)$$

em que:

$\beta$  - parâmetro de escala (adimensional);

$\alpha$  - parâmetro de forma (adimensional);

$x$  - total de precipitação (mm);

$\Gamma$  - função Gama.

Foram utilizados os métodos dos momentos para a estimativa dos parâmetros da distribuição Gama (equações 2 e 3), bem como o método da máxima verossimilhança, segundo as equações (4 e 5) derivadas por THOM (1958).

$$\alpha = \frac{\bar{x}^2}{s^2} \quad (2) \quad \beta = \frac{s^2}{\bar{x}} \quad (3)$$

em que:

$\bar{x}$  - precipitação média do período (mm);

$s^2$  - variância da amostra.

$$12A\alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0 \quad (4)$$

sendo,

$$A = \ln(\bar{x}) - \frac{1}{N \sum_{i=1}^N \ln(x_i)} \quad (5)$$

em que:

$\bar{x}$  - média das precipitações (mm);

$N$  - número de ocorrência de precipitação;

$x_i$  - altura de precipitação (mm).

Resolvendo a equação 4 para a única raiz pertinente de  $\alpha$ , tem-se como estimativa para o parâmetro de forma, a equação 6, e para o parâmetro de escala, a equação 7.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + (4/3)A}}{4A} \quad (6) \quad \beta = \frac{\bar{x}}{\alpha} \quad (7)$$

Para a comparação entre os métodos, utilizou-se o desvio das precipitações geradas, denominado  $D_1$ , de acordo com a equação 8 (NASCIMENTO et al., 2004).

$$D_1 = \frac{P_{MVS} - P_{MOM}}{P_{MVS}} \quad (8)$$

em que:

$P_{MVS}$  - precipitação mensal sintética obtida com o método da máxima verossimilhança (mm);

$P_{MOM}$  - precipitação mensal sintética obtida com o método dos momentos.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Tabela 1 verifica-se que a precipitação durante os meses do ano é praticamente uniforme, sem definição clara dos períodos secos ou úmidos, o que é uma característica da região do estudo. Verifica-se a existência de altos valores

de desvio padrão, indicando grande variação nos valores da precipitação durante um mesmo mês do ano. Os valores mínimo e máximo de precipitação foram verificados nos meses de julho e agosto, com valores de 1,0 e 467,0 mm, respectivamente.

**Tabela 1.** Estatísticas descritivas da precipitação total mensal anual para o município de Caçapava do Sul, no período de 1913 a 2002.

Mês	Média	Desv.Pad.	Mediana (mm)	Mínima	Máxima	CV (%)	Assimetria	Curtose
Jan	137,2	72,4	125,5	13,0	330,0	52,8	0,90	0,36
Fev	111,0	64,8	103,0	2,0	387,0	58,4	1,04	2,53
Mar	140,7	73,4	131,0	16,0	425,0	52,2	1,21	3,14
Abr	131,8	73,6	115,5	21,0	395,0	55,8	1,35	2,78
Mai	131,8	77,7	119,0	11,0	379,0	58,9	0,89	0,58
Jun	166,7	88,7	157,0	19,0	609,0	53,2	1,79	6,59
Jul	142,3	83,5	116,5	1,0	449,0	58,7	1,21	1,66
Ago	145,1	81,4	123,5	25,0	467,0	56,1	1,13	1,76
Set	180,2	65,7	181,0	31,0	388,0	36,5	0,31	0,70
Out	169,0	87,5	165,5	13,0	449,0	51,8	0,78	1,08
Nov	107,5	60,7	103,5	5,0	273,0	56,5	0,56	0,00
Dez	115,3	64,4	104,0	4,0	360,0	55,9	1,29	2,75

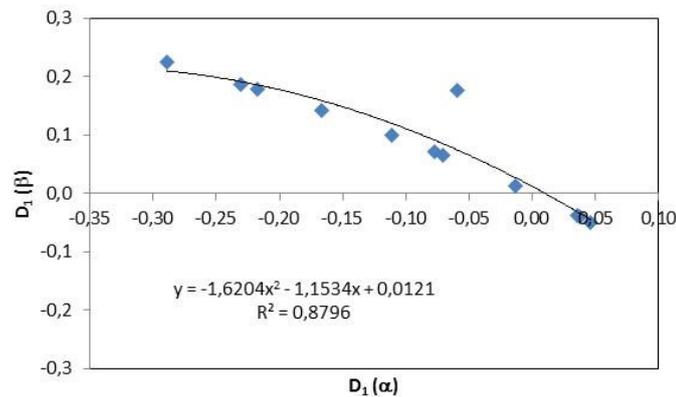
Considerando-se o método dos momentos, observa-se na Tabela 2 que os valores de  $\alpha$  variaram de 2,8796 a 7,5077, enquanto que os de  $\beta$ , de 23,9960 a 49,0417. Para o método da máxima verossimilhança,  $\alpha$  variou de 2,3831 a 6,4327 e  $\beta$  de 28,0064 a 55,1319. Segundo NAGHETTINI; PINTO (2007), a variação do parâmetro  $\alpha$  garante a diversidade de formas da distribuição Gama. À medida que esse parâmetro diminui, mais assimétrico é o formato da densidade de probabilidades Gama. Ao contrário, para valores muito elevados de  $\alpha$ , a distribuição Gama aproxima-se da forma de uma distribuição normal. Há que se destacar o mês de fevereiro, com menor coeficiente de variação, 36,5%, maiores valores de  $\alpha$ , 7,5077 e 6,4327 e menores de  $\beta$ , 23,9960 e 28,0064, para os métodos dos momentos e máxima verossimilhança, respectivamente. NASCIMENTO et al. (2004) citam que para séries que possuem um coeficiente de variação elevado, o método dos momentos tende a produzir estimativas superiores ao método da máxima verossimilhança.

**Tabela 2.** Parâmetros de forma ( $\alpha$ ) e de escala ( $\beta$ ) da distribuição Gama para os dois métodos de estimativa

Mês	Método dos momentos		Método da máxima verossimilhança	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
Jan	3,5936	38,1763	3,5473	38,6740
Fev	2,9324	37,8422	2,3831	46,5630
Mar	3,6745	38,2973	3,4696	46,5630
Abr	3,2103	41,0582	3,3284	39,6016
Mai	2,8796	45,7739	2,6732	49,3083
Jun	3,5324	47,1821	3,7043	44,9933
Jul	2,9018	49,0417	2,6112	54,5007
Ago	3,1792	45,6509	3,3045	43,9204
Set	7,5077	23,9960	6,4327	28,0064
Out	3,7308	45,2865	3,0646	55,1319
Nov	3,1314	34,3294	2,4285	44,2651
Dez	3,2042	35,9836	2,9932	38,5200

Na Figura 1 são apresentados os desvios ( $D_1$ ) nas estimativas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição Gama, em que os valores positivos mostram que as estimativas obtidas pelo método dos momentos são menores do que as

obtidas pelo método da máxima verossimilhança. Para valores negativos de  $D_1$ , ocorre o inverso. À medida que o método dos momentos fornece uma estimativa superior ao método da máxima verossimilhança para o parâmetro  $\alpha$ , ocorre o inverso para o parâmetro  $\beta$ , em que o método dos momentos fornece uma estimativa inferior (valores de  $D_1$  negativos). Quando o método da máxima verossimilhança estima valores menores para  $\alpha$  do que o método dos momentos, na estimativa das precipitações, os valores estimados com o método da máxima verossimilhança produzem valores superiores. Para o parâmetro  $\beta$  ocorre uma correspondência direta, valores superiores estimados para o parâmetro geram precipitações superiores.



**Figura 1.** Desvios ( $D_1$ ) nas estimativas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição Gama

#### 4. CONCLUSÕES

O método dos momentos tende a estimar maiores valores para o parâmetro  $\alpha$  e menores para o parâmetro  $\beta$ , quando comparado ao método da máxima verossimilhança.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOTELHO, V.A.; MORAIS, A.R. Estimativa dos parâmetros da distribuição gama de dados pluviométricos do município de Lavras, Estado de Minas Gerais. **Ciência e Agrotecnologia**, v.23, p.697-706, 1999.

KREPPER, C.M.; SCIAN, B.V.; PIERINI, J.O. Time and space variability of rainfall in central East Argentina. **Journal of Climate**, v.2, p.39-47, 1989.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E.J.A. **Hidrologia Estatística**. Belo Horizonte, CPRM, 2007. 552p.

NASCIMENTO, L.S.V.; CAMPOS, J.N.B.; BARCELOS, D.G.; STUDART, T.M.C. Incerteza na estimativa de parâmetros para a geração de vazões sintéticas pelo método de Monte Carlo. In: **VII SIMPÓSIO DE RECURSOS HÍDRICOS DO NORDESTE**, São Luis, 2004, **Anais...** São Luis: ABRH, 2004.

SAMPAIO, S.C.; QUEIROZ, M.M.F.; FRIGO, E.P.; LONGO, A.J.; SUSZEK, M. Estimativa e distribuição de precipitações decendiais para o Estado do Paraná. **Irriga**, v.12, n.1, p.38-53, 2007.

THOM, H.C.S. A note on the gamma distribution. **Monthly Weather Review**, v.86, n.4, p.117-122, 1958.