Extenção Intervalar para a Esperança da Probabilidade das Distribuições Exponencial e Pareto

LUCAS MENDES TORTELLI[1]; MAURICIO DORNELES CALDEIRA BALBONI[1]; ; MARILINE LORINI[1]; ALICE FONSECA FINGER[2], ALINE BRUM LORETO[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – {lmtortelli,mdcbalboni,mlorini}@inf.ufpel.edu.br*
[2]*Universidade Federal do Pampa (Unipampa) - alicefinger@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – aline.loreto@inf.ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A computação científica é extremamente utilizada quando é necessário obter exatidão e confiabilidade nos resultados obtidos(CAMPOS, 2002). Ao representar dados numéricos no sistema de ponto flutuante, estes são aproximados para um subconjunto finitos dos números reais(RATSCHEK, 1988). Através desta aproximação de valores ocasionam-se erros pela impossibilidade da máquina representar estes valores com toda a sua exatidão. Estes erros podem ser tanto originados por falha humana, falha nos instrumentos de medida para obtenção dos dados ou pelos próprios erros originados pelo sistema de ponto flutuante (arredondamento e truncamento). O erro total obtido será o acumulo dos erros nos resultados intermediários(RUGIERO, 2004).

A matemática intervalar proposta por (MOORE, 1966) surge para automatizar o cálculo do erro computacional científico com limites confiáveis. Nesta forma de representação numérica os valores pontuais representados por um intervalo X que os contenha. Todo erro originado para tratamento dos valores como o arredondamento e truncamento,para adequar o valor pontual a ser representado pela máquina, são tratados pela aritmética intervalar e pelos arredondamentos direcionados. O tamanho do intervalo é utilizado como medida de de qualidade (RATSCHEK, 1988).

Quando um experimento contém grande número de dados para serem trabalhados, para facilitar a compreensão utilizam-se variáveis aleatórias para representar estes valores (FELLER, 1968). Em particular é necessário descobrir o comportamento das distribuições que é dado pelo valor Esperado ou esperança matemática. A esperança matemática consiste em obter uma estimativa dos possíveis resultados da probabilidade (TORTELLI, 2013).

O presente trabalho visa realizar a Extensão Intervalar para a Esperança da Probabilidade das Distribuições Exponencial e Pareto. Posteriormente será feito a implementação destas novas expressões obtidas no ambiente de programação intervalar IntPy, que dentre todos os ambientes analisados foi o que obteve-se os melhores resultados quanto a exatidão, cálculo de erro absoluto, erro relativo e diâmetro de intervalo(BALBONI, 2014).

2. METODOLOGIA

Uma distribuição de probabilidade serve para descrever a forma de organização dos indivíduos de uma população, cada estudo de população contêm sua função analítica que estuda seu conjunto de dados. O valor esperado denotado por E(x) ou μ, é utilizado para se determinar a forma em que esta população está distribuida e onde ocorre maior agrupamento de dados. Cada variável contêm sua função real para determinação do seu valor esperado, no qual utiliza somente as características relevantes da distribuição probabilística.

Como estes cálculos são realizados com um grande número de dados, há necessidade de se apresentar resultados mais confiaveis e com maior precisão, disto surge a necessidade de substituir estes valores pontuais em um intervalo X de tal forma que $x_1 \leq x \leq x_2$, sendo x_1 e x_2 os limites inferiores e superiores do intervalo X.

Segundo FERSON et al. (2002), historicamente o primeiro método para computar o intervalo solução é o método chamado de extensão intervalar. Nele repete-se a computação formando o programa passo-a-passo, substituindo cada operação elementar de números reais pela correspondente operação da aritmética intervalar.

A Distribuição de Pareto visa o estudo de proporção de causa e efeito. Este princípio também chamado de 80/20, advem da forma em que a variável se distribui, onde 80 % das consequências ocorrem através de 20 % das causas(LORENZ, 1905).

Sua função real de valor esperado, em que α é o parâmetro de forma e β é o parâmetro de escala, é a que segue:

$$E(x) = \alpha\,\beta^{\alpha} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{\alpha\,\beta}{\alpha - 1} \quad (1)$$

Realizando a subtituição de todos as variáveis reais para intervalos e adequando-o o cálculo para o limite inferior e superior, a seguinte fórmula onde A e B são intervalos:

$$E(X) = \left[\ \underline{AB}^{\underline{A}} \int_{\underline{B}}^{+\infty} \frac{1}{\underline{X^{\underline{A}}}} dX ; \overline{AB}^{\overline{A}} \int_{\overline{B}}^{+\infty} \frac{1}{\overline{X}^{\overline{A}}} dX\ \right] \quad (2)$$

Resolvendo a equação (2) afim de encontrar a primitiva, obtem-se o valor esperado intervalar da distribuição de Pareto:

$$E(X) = \left[\ \frac{\underline{AB}}{\underline{A}-1} ; \frac{\overline{AB}}{\overline{A}-1}\ \right] \quad (3)$$

A distribuição de Exponencial visa descrever a forma que uma população se organiza quando há uma taxa de falhas constante, muito utilizada para media de tempo de vida de produtos e materiais. Sua esperança contêm a seguinte função real, onde α é o tempo média de vida:(WALPOLE , 2007)

$$E(x) = \alpha \int_{0}^{+\infty} x\,e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}. \quad (4)$$

Substituindo todos os valores reais para aplicar o método de extensão intervalar, obtem-se a expressão intervalar que deve ser implementada pela aritmética intervalar:

$$E(X) = \left[\ \underline{A} \int_{0}^{\infty} \underline{X} e^{-\underline{AX}} dX ; \overline{A} \int_{0}^{\infty} \overline{X} e^{-\overline{AX}} dX\ \right] \quad (5)$$

Integrando a função do valor esperado afim de encontrar sua primitiva, obtem-se a seguinte equação do valor esperado intervalar da distribuição exponencial.

$$E(X) = \left[\ \frac{1}{\underline{A}} ; \frac{1}{\overline{A}}\ \right] \quad (6)$$

Cálculos numéricos em computadores devem ser realizados por meio das linguagens ou bibliotecas que tenham definidos o tipo intervalo e as operações sobre o tipo, usualmente denominadas de linguagens XSC (eXtended for Scientific Computation)(KLATTE, 1993), além de serem linguagens de grande precisão numérica voltados a utilização de cálculos científicos.

A computação com utilização de intervalos fornece as seguintes medidas de erro (RATSCHEK, 1988):

Erro Absoluto: $| x - m(X) | < w(x)/2$, onde $m(x)$ é o ponto médio do intervalo e $w(x) = \overline{x} - \underline{x}$ é o diâmetro do intervalo

Erro Relativo: $\left|\frac{x - m(X)}{x}\right| \leq \frac{w(X)}{2 \min|X|}$ se $0 \notin X$, onde $|X| = \{|X| : x \in X\}$

A partir das fórmulas (3) e (6) foi implementado no ambiente de programação intervalar IntPy, que implementa a matemática intervalar com máxima exatidão. E através das medidas de erro foram analisados os resultados obtidos pela aplicação dos valores esperados intervalares.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através dos exemplos a seguir foi aplicado as fórmulas (3) e (6) respectivamente, o valor esperado intervalar das Distribuições Pareto e Exponencial. A partir desta aplicação será apresentado os resultados obtidos no método real e intervalar, sendo este também verificado a qualidade do intervalo solução através da utilização das medidas de erros.

Exemplo 1: Numa população os ingressos são distribuidos segundo uma distribuição de Pareto, com $\alpha = 3$ e $\beta = 1000$. Qual é o valor médio de ingressos distribuidos para esta população? Através da fórmula (3) obtemos a Tabela 1, que representa os resultados obtidos neste cálculo e através da Tabela 2 apresentam-se os resultados obtidos no cálculo dede Erro Absoluto, Erro Relativo e diâmetro do intervalo, sendo estes as ferramentas para medida da qualidade do intervalo.

Tabela 1. Resultados do Valor Esperado Real e Intervalar de Pareto

	Intervalar	Real
Resultado	[1499.98748506, 1500.012515062]	1500

Tabela 2. Medidades de Erro para o Valor Esperado Intervalar de Pareto

Diâmetro	Erro Absoluto	Erro Relativo
0.0250300000016	6.26248493063e-08 < 0.0125150000008	4.17498995375e-11 <= 8.34340294531e-06

Exemplo 2: Suponha que o tempo de vida de uma determinada espécie de inseto tenha uma distribuição exponencial de parâmetro λ =1/12. Qual a esperança média de vida deste inseto?

Tabela 3. Resultados do Valor Esperado Real e Intervalar de Exponencial

	Intervalar	Real
Resultado	[11.998560172779264, 12.001440172820741]	12

Tabela 4. Medidades de Erro para o Valor Esperado Intervalar da Exponencial

Diâmetro	Erro Absoluto	Erro Relativo
0.0028800000414	1.72800003639e-07 < 0.00144000002074	1.44000003033e-08 <= 0.000120014401728

4. CONCLUSÕES

O cálculo de valor esperado é de suma importância para a descrição mais detalhada sobre a organização de uma população. Utilizando-se do método de extensão intervalar e adequando todas as funções reais dos valores esperados das distribuições Pareto e Exponencial para que possam ser operadas com intervalo, é demonstrado pelas tabelas 2 e 4 que as soluções resultantes são de qualidade, uma vez que as medidas de erros não são muito dispersas do valor real.

Como objetivo de continuidade de trabalho, será utilizar a extensão intervalar nos demais valores esperados das distribuições restantes de probabilidade, e averiguar que seus resultados se tornam mais confiáveis e exatos com a utilização de intervalos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMPOS, M. A., DIMURO, G. P., ARÁUJO, J. F. F. and DIAS,A. M., **"Probabilidade intervalar e cadeias de markov intervalares no maple"**, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, vol. 3, no. 2, pp.53-62, 2002.

KLATTE, R, KULISCH, U., WIETHOFF, A., LAWO, C., RAUCH, M. **C-XSC - A C++ Class Library for Extended Scientific Computing**. Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

FERSON, S.l, GINZBURG, L., KREINOVICH, V. "**Absolute bounds on the mean of sum, product, etc.: A probabilistic extension of interval arithmetic**", SIAM WORKSHOP ON VALIDATED COMPUTING, Toronto, 2002.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

FELLER, W. **An Introduction to Probability and Its Applications**. 3th.ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1968.

RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimization**. Ellis Horwood, 1988.

RUGGIERO, M.A. G.; LOPES, V.L. R. **Cálculo Numérico: aspectos Teóricos e Computacionais.** 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2004.

TORTELLI, L. M.; LORINI, M.; GREHS, E. A., BALBONI, M. D. C.; FINGER, A. F., LORETO, A. B. , **Extensão Intervalar para a Esperança da Probabilidade.** XXII Congresso de Iniciação Científica - UFPel, 2013.

BALNONI, M. D. C.; TORTELLI, L. M.; LORINI, M.; FURLAN, V. S.; FINGER, A.F.; LORETO ,A.B. **Critérios para Análise e Escolha de Ambientes Intervalares**, Revista Jr. de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, FURG,nº7, Rio-Grande, 2014.

WALPOLE, Ronald E.; MYERS, Raymond H.; MYERS, Sharon L. e YE, Keying. **Probability & Statistics for Engineers & Scientists**. Pearson Education International. 2007, p.196.

LORENZ, M.O. **Methods of measuring the concentration of wealth,** Publications of the American Statistical Association 9; p.209-219, 1905.