A Geometria das Superfícies Poliédricas: curvaturas e geodésicas

LUCAS SOARES PRIEBE[1]; ANA PAULA LUDWIG[2]; LISANDRA SAUER[3]; GIOVANNI DA SILVA NUNES[4]

[1]Lucas Soares Priebe– lucassoarespriebe@hotmail.com
2Ana Paula Ludwig– analudwing93@hotmail.com
[3]Lisandra Sauer(orientador)– lisandra.sauer@ufpel.edu.br
[4]Giovanni da Silva Nunes(orientador)–giovanni.nunes@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é estudar geometria, curvatura e geodésicas, de superfícies poliédricas, o qual, amplia de forma natural os conceitos não abordados no estudo clássico da Geometria Espacial. Este desenvolvimento nos leva a aplicar conceitos e definições da Geometria Diferencial que é uma área que generaliza o estudo do Cálculo diferencial e integral para ambientes mais gerais que o espaço euclidiano, a saber as superfícies. A principal diferença entre nosso objeto de estudo e a Geometria Diferencial é que a referida área não contempla casos em que a superfícies contenha picos ou vértices, como ocorre nos poliedros. Com o avanço da geometria computacional foi necessário ampliar conceitos para superfícies com as características acima. Em 1998, Polthier e Schimes, publicaram um artigo que aborda conceitos da Geometria diferencial para os casos não diferenciáveis. Esta abordagem ocorre de forma bem natural e se estenderemos as definições para o caso já conhecido eles coincidem. Nosso trabalho consiste em fazer os detalhes e escrever o assunto de forma que um aluno de graduação que ainda não possua o pré-requisito do Cálculo Diferencial, seja capaz de compreendê-los. Salientamos que para formalizar tal teoria é necessário adaptar várias definições existentes para situações que sejam mais abrangentes e sem que se perca o seu sentido original na essência da sua definição. Portanto os primeiros resultados esperados se resumem a estas adaptações teóricas e a compreensão destes novos conceitos, que são de grande valor para áreas científicas como Matemática e Ciência da Computação.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada foi a pesquisa em um livro e artigo da área ver [1] e [2], consulta a internet, em destaque o site [3], e também encontros periódicos para discussão dos tópicos a serem estudados e apresentados em seminários.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS

Uma *superfície poliédrica limitada* S é a reunião de um número finito de polígonos planos, tais que:

a) Cada lado de polígono está no máximo em dois polígonos;
b) Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devemformar uma única poligonal fechada, chamada de bordo.

As superfícies poliédricas que tem bordo são chamadas abertas, as que não tem são chamadas fechadas.

CURVATURA EM POLIEDROS

Seja S uma Superfície poliedral, $F = \{fi\}$e $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$o conjunto de faces em Ssendo n o número de faces que possuem o vértice p em comum. Em nosso trabalho, iremos considerar a classe das curvas γtal que $\gamma|fi$ é uma linha poligonal. Sendo assim seu comprimento é dado por:

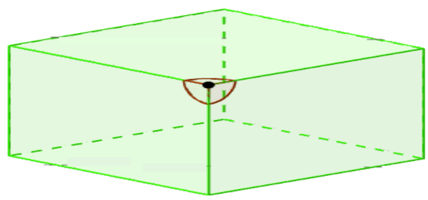
$$Comprimento\ (\gamma) = \sum_{i=1}^{n} comprimento\ (\gamma|\ fi)$$

Seja $p \in S$ tal que,$p \notin \partial S\ (bordo\ de\ S)$. Definimos *ângulo total* em p, e denotamos por$\theta(p)$, como segue:

$$\theta(p) = \begin{cases} 2\pi, & se\ p\ \text{não é}\ um\ vértice \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta i(p)\,, & se\ p\ \text{é}\ vértice \end{cases}$$

onde $\theta(p)$ é a medida do ângulo interior formado pelas arestas de fi no vértice$p$, e n é o número de faces que contém p.

Exemplo. Seja p um vértice do paralelepípedo reto. Temos 3 faces que possuem p, logo
$\theta(p) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, como
$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90°$,$\theta(p) = 270°$



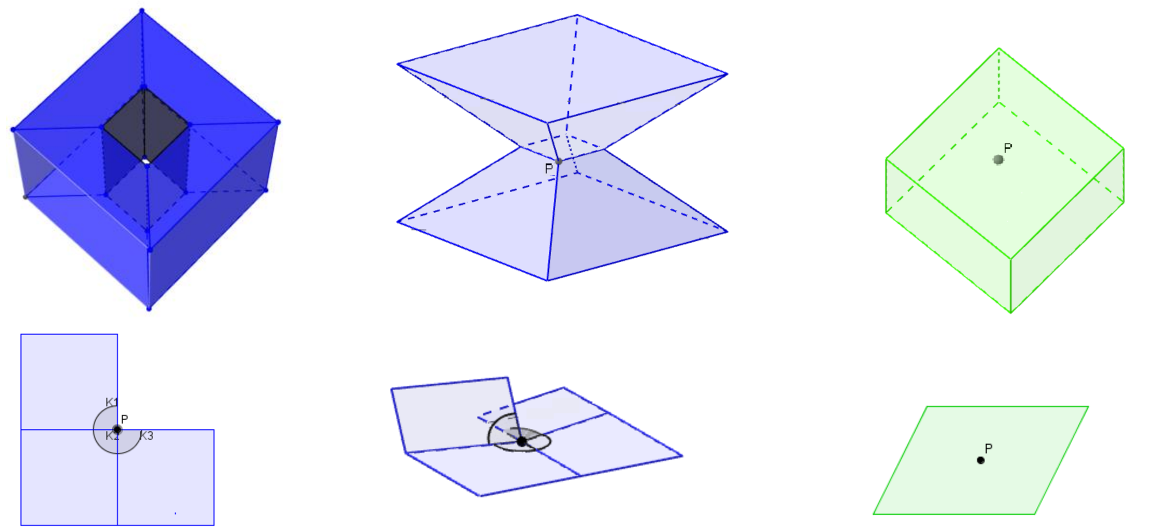
Com essa notação de ângulo total podemos definir a curvatura de Gauss$K(p)$de um ponto p. Como segue:

$$K(p) = 2\pi - \theta(p)$$

$$K(p) = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta i(p)$$

Observe que a curvatura mede o quanto o ângulo total em p, $\theta(p)$, difere de 2π. Logo podemos classificar os pontos de uma superfície poliedral em:

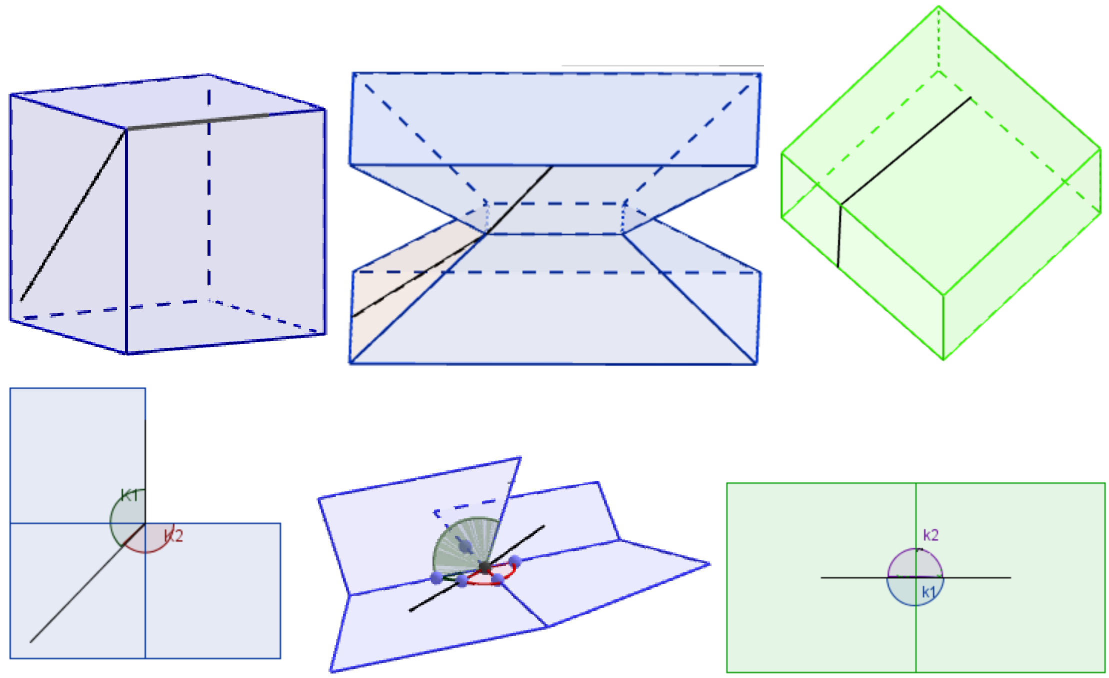
i) esférico: se $K(p) > 0$
ii)hiperbólico: se $K(p) < 0$
iii) euclidiano: se $K(p) = 0$



(Esférico, $K(p) > 0$) (Hiperbólico, $K(p) < 0$) (Euclidiano, $K(p) = 0$)

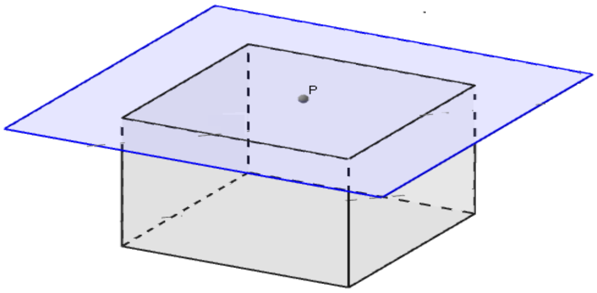
RETAS GEODÉSICAS

Seja S uma superfície poliedral e $\gamma \subset S$ uma curva. Dizemos queγ é geodésica retilínea,se para qualquer ponto $p \in \gamma$ os ângulosθd($\hat{a}ngulo\ direito$) e θe($\hat{a}ngulo\ esquerdo$)forem iguais. As figuras a baixo ilustram algumas geodésicas retilíneas.



Para falar em problema de valor inicial, primeiro vamos inserir o conceito de vetor tangente na superfície poliedral.

Seja S uma superfície poliedral e $p \in S$ um ponto. Um *vetor tangente*$v$com um ponto de base situa-se em uma face adjacente. O espaço poliedral TpS consiste de todos vetores tangentes a p.



Teorema (problema de valor inicial): Seja S uma superfície poliédrica e $p \in S$ um ponto com vetor tangente $v \in TpS$. Então existe apena uma única geodésica retilíneaγ, que

$$\gamma(0) = p$$
$$\gamma'(0) = v,$$

e a geodésica estende para o limite de S

Dem. De fato, sendo t um intervalo pertencente a S, temos que a reta geodésica é descrita por $\gamma(t) = p + tv$, assim esta geodésica se desloca sobre a superfície S até chegar a seu bordo, usando a definição 3 temos que uma única geodésica se estende além do vértice ou aresta mantendo seus ângulos direito e esquerdo iguais.

c.q.d.

Seja S uma superfície poliedral e $\gamma \subset S$ uma curva. Dizemos queγ é geodésica mais curta, se e somente se, dentre todas as curvas retilíneas que ligam quaisquer dois pontos de γ, o comprimento de γ entre estes dois pontos for o menor possível.

4. CONCLUSÕES

Apesar do estudo da Geometria em Superfícies poliédricas não ser comum na leitura de livros didáticos de nível superior concluímos que pode ser facilmente desenvolvida e aplicada.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LIMA, E. L.; CARVALHO P. C.; WAGNER E.; MORGADO A. C. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: Solgraf Publicações Ltda, 1999.

[2] POLTHIER, K; SCHIMES, M. Straightest Geodesics on Polyhedral Surfaces. Mathematical Visualization, Mathematical Visualization, Ed: H.C. Hege Springer Verlag p. 1-15, 1998

<u>Documentos eletrônicos</u>

[3] Universidade do Porto, CMUP. Portugal. Acessado em 24 julh. 2014. Online. Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/triangulos/apresentacao-divulgacao.html