HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO CALOR

LUANA LAZZARI[1a]; LUCAS DOS SANTOS FERNANDEZ[1b]; MARCOS PINHEIRO DE LIMA[1c]; LESLIE D. P. FERNÁNDEZ[2]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[3]

[1]*Mestrando(a) do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat), Instituto de Física e Matemática (IFM), Universidade Federal de Pelotas (UFPel),*
[1a]*luana_lazzari@hotmail.com*, [1b]*lucassfernandez@gmail.com*, [1c]*marcos.p.lima@hotmail.com;*
[2]*Professor do Departamento de Matemática e Estatística, IFM, UFPel,*
leslie.fernandez@ufpel.edu.br;
[3]*Pesquisador Visitante Especial no PPGMMat (CAPES nº 88881.030424/2013-01), Professor do Departamento de Matemática, Universidade de Havana, Cuba, jbravo@matcom.uh.cu*

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de estruturas mecânicas e biomecânicas para o estudo do comportamento estático e dinâmico destas é um desafio para engenheiros estruturais e pesquisadores. Características tais como a heterogeneidade e periodicidade dos materiais bem como o comportamento não linear que estes podem apresentar levam o pesquisador a problemas matemáticos difíceis de serem modelados e resolvidos e muitas vezes o induzem a simplificações e restrições que não proporcionam um modelo desejado.

O Método de Homogeneização Assintótica (MHA) trata-se de um método matemático de multiescala empregado para a investigação de propriedades microscópicas e macroscópicas de estruturas periódicas sendo aplicado a todos os tipos de processos que podem ocorrer em meio periódico (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), e firmou-se como uma eficiente ferramenta para o tratamento tanto da heterogeneidade quanto da periodicidade de estruturas. A utilização deste método no estudo de ondas sísmicas (CAPDEVILLE; GUILLOT; MARIGO, 2010), de estruturas ósseas (ROHAN et al., 2012) e da condutividade térmica em materiais compósitos (ANDRIANOV; KALAMKAROV; STARUSHENKO, 2013) são apenas alguns exemplos de sua aplicabilidade e os esforços em implementar este método computacionalmente, mesmo para problemas específicos, são visíveis (PORTO, 2006; QUINTELA, 2011).

A equação parabólica está entre as mais estudadas em matemática aplicada sendo uma de suas representantes a equação do calor que modela a condução da temperatura u_ε em estruturas caracterizadas por um parâmetro geométrico ε, $0 < \varepsilon \ll 1$, que indica a existência de duas escalas estruturais. Sua representação analítica é:

$$c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right) = f(x,t), \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{1}$$

onde c é a capacidade térmica, k é a condutividade térmica e f é a fonte de calor. Tem-se associadas a eq. (1) as seguintes condições:

$$u_\varepsilon(0,t) = 0, \qquad u_\varepsilon(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = \psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{3}$$

sendo que as funções c, k, f e ψ são diferenciáveis; c e k funções ε-periódicas, positivas e limitadas.

Objetiva-se com este trabalho resolver analiticamente o problema (1)-(3) pelo MHA e apresentar um resultado que prova que a relação de proximidade entre $u_\varepsilon(x,t)$, a solução do problema (1)-(3), e $u_0(x,t)$, a solução do problema homogeneizado, é de ordem $\sqrt{\varepsilon}$, sendo esta a principal contribuição do trabalho.

Este trabalho é a primeira incursão dos autores ao estudo do MHA e de alguns dos seus aspectos matemáticos mais relevantes, necessários para futuras aplicações em problemas multidimensionais.

2. METODOLOGIA

Aplica-se o MHA ao problema (1)-(3) assumindo, inicialmente, uma solução na forma de uma série assintótica em potências de ε chamada solução assintótica formal (s.a.f.), originando uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de ε. A partir destes problemas obtêm-se a equação do problema local e a equação do problema homogeneizado. Quando ε tende a zero, a solução do problema original converge para a solução do problema homogeneizado (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

O Lema abaixo é um importante resultado em homogeneização e será utilizado para construir a s.a.f. do problema (1)-(3).

Lema (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989): Sejam $F(y)$ e $k(y)$ funções diferenciáveis e 1-periódicas com $k(y)$ positiva e limitada. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $LN = F(y)$ é que

$$\langle F(y)\rangle \equiv \int_0^1 F(y)dy = 0, \tag{4}$$

onde $L = \frac{d}{dy}\left(k(y)\frac{d}{dy}\right)$.

Para provar que a relação de proximidade entre $u_\varepsilon(x,t)$ e $u_0(x,t)$ é de ordem $\sqrt{\varepsilon}$ será utilizada uma versão adaptada do *Princípio do Máximo Generalizado* (PMG) (ver Teorema 2, p. 8, de BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para solucionar o problema analiticamente, considera-se a expansão assintótica truncada $u_\varepsilon^{(2)} = u_0(x,y,t) + \varepsilon u_1(x,y,t) + \varepsilon^2 u_2(x,y,t)$ na equação (1), onde $u_j(x,y,t), j = 0,1,2,$ são funções diferenciáveis e 1-periódicas na variável local $y = x/\varepsilon$, obtendo-se uma sequência recorrente de equações:

$$\varepsilon^{-2}: \quad L_{yy}u_0 = 0, \tag{5}$$

$$\varepsilon^{-1}: \quad -L_{yy}u_1 - L_{xy}u_0 - L_{yx}u_0 = 0, \tag{6}$$

$$\varepsilon^{0}: \quad -L_{yy}u_2 - L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}u_0 - f(x,t) + c(y)\,\partial u_0/\partial t = 0, \tag{7}$$

onde $L_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k(y)\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$, $\alpha,\beta \in \{x,y\}$. As equações para ε e ε^2 foram omitidas, pois não são necessárias para obter a s.a.f.. Analogamente, a expansão truncada é substituída nas condições (2) e (3) para completar os problemas correspondentes a u_j.

Aplicando a (5)-(7) o *Lema* e as condições obtém-se que $u_0 = u_0(x,t)$, $u_1 = N_1(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}$ e $u_2 = N_2(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + M(y)\frac{\partial u_0}{\partial t}$, onde $N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{k}}{k(s)} - 1\right)ds$, $N_2(y) = \hat{k}\langle N_1\rangle \int_0^y \frac{ds}{k(s)} - \int_0^y N_1(s)ds$, $M(y) = \int_0^y \frac{1}{k(w)}\left\{\int_0^w [c(s) - \langle c\rangle]ds - K_M\right\}dw$, com $K_M = \hat{k}\int_0^1 \frac{1}{k(w)}\left\{\int_0^w [c(s) - \langle c\rangle]ds\right\}dw$ e $\hat{k} = \left(\int_0^1 \frac{1}{k(y)}dy\right)^{-1}$. Em particular, a temperatura média u_0 é a solução do chamado problema homogeneizado:

$$\langle c\rangle\frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{8}$$

$$u_0(0,0,t) = 0, \qquad u_0(1, 1/\varepsilon, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{9}$$
$$u_0(x,y,0) = \psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{10}$$
onde $\langle c \rangle$ é a capacidade calorífica efetiva e $\hat{k}$ é a condutividade térmica efetiva.

Para mostrar que a relação de proximidade entre $u_\varepsilon(x,t)$ e $u_0(x,t)$ é de ordem $\sqrt{\varepsilon}$, ou seja,
$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{11}$$
considere, com $y = x/\varepsilon$, a aproximação assintótica $u_\varepsilon^{(1)} = u_0(x,y,t) + \varepsilon u_1(x,y,t)$ e o operador diferencial $L^\varepsilon = c(y)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Note que o problema (1)-(3) pode ser escrito da forma:
$$L^\varepsilon u_\varepsilon - f = 0, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{12}$$
$$u_\varepsilon(0,t) = 0, \qquad u_\varepsilon(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{13}$$
$$u_\varepsilon(x,0) = \psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{14}$$

e que substituir $u_\varepsilon^{(1)}$ em (1) é equivalente a calcular $L^\varepsilon u_\varepsilon^{(1)} - f \approx 0$. Assim, considerando $u_2 = 0$ na eq. (7) e isolando f, obtém-se
$$f = c(y)\frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(k(y)N_1(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right). \tag{15}$$
Então,
$$L^\varepsilon u_\varepsilon^{(1)} - f = c(y)\varepsilon N_1(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon k(y)N_1(y)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \equiv F(x,t,\varepsilon), \tag{16}$$
e aplicando $u_\varepsilon^{(1)}$ nas condições (2) e (3), obtém-se
$$u_\varepsilon^{(1)}(0,t) = 0, \qquad u_\varepsilon^{(1)}(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{17}$$
$$u_\varepsilon^{(1)}(x,0) = \psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{18}$$

Subtraindo o problema (16)-(18) do problema (12)-(14), tem-se o seguinte problema:
$$L^\varepsilon\left(u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(1)}\right) = -F(x,t,\varepsilon), \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{19}$$
$$u_\varepsilon(0,t) - u_\varepsilon^{(1)}(0,t) = 0, \qquad u_\varepsilon(1,t) - u_\varepsilon^{(1)}(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{20}$$
$$u_\varepsilon(x,0) - u_\varepsilon^{(1)}(x,0) = 0, \qquad x \in (0,1). \tag{21}$$

A aplicação do PMG no problema (19)-(21) resulta que
$$\left\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(1)}\right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} \leq c(T)\|-F\|_{L_2((0,1)\times(0,T))}, \tag{22}$$
Calcula-se $\|-F\|_{L_2((0,1)\times(0,T))}$ a partir da equação
$$\|-F\|^2_{L_2((0,1)\times(0,T))} = \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 \left(c(y)N_1(y)\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t \partial x} - k(y)N_1(y)\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x^3}\right)^2 dx dt. \tag{23}$$
Para estimar as integrais de (23) utiliza-se o Teorema de Weierstrass de modo que $\exists\ A, B > 0$ tais que
$$\|-F\|^2_{L_2((0,1)\times(0,T))} \leq \varepsilon A^2 B^4 T \Leftrightarrow \|-F\|_{L_2((0,1)\times(0,T))} \leq \sqrt{\varepsilon} A B^2 \sqrt{T}, \tag{24}$$
onde $c(T) = \sqrt{T}$, para algum $T \in \mathbb{R}_+^*$. A partir de (24), conclui-se que
$$\left\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(1)}\right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{25}$$
Pode-se mostrar de modo análogo que
$$\left\|u_\varepsilon^{(1)} - u_0\right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{26}$$

Portanto, a partir de (25) e (26), segue que

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} &= \left\|u_\varepsilon + u_\varepsilon^{(1)} - u_\varepsilon^{(1)} - u_0\right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} \\ &\le \left\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(1)}\right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} + \left\|u_\varepsilon^{(1)} - u_0\right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} \\ &= O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) + O(\sqrt{\varepsilon}) \\ &= O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \tag{27}$$

ou seja,

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{28}$$

Analogamente, as técnicas empregadas acima podem ser utilizadas para provar que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C([0,1]\times[0,T])} = O(\varepsilon) \tag{29}$$

e

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2([0,1]\times[0,T])} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{30}$$

4. CONCLUSÕES

A demonstração aqui apresentada para provar a proximidade entre as soluções do problema (1)-(3) e (8)-(10) não aparece explicitamente detalhada na literatura consultada. O trabalho se mostra relevante na medida que as técnicas utilizadas servem de base para a resolução de problemas multidimensionais, pois seguindo a metodologia exposta, sempre que exista um princípio do máximo é possível construir uma s.a.f. que seja uma expansão assintótica da solução exata do problema original.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRIANOV, I.V.; KALAMKAROV, A.L.; STARUSHENKO, G.A. Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section. **Composites: Part B**, Philadelphia, v. 50, p. 44-53, 2013.

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J.J. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. **Geophysical Journal International**, Malden, v. 181, p. 897-910, 2010.

PORTO, E.C.B. **Método da homogeneização aplicado à otimização estrutural topológica**. 2006. 179f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Estadual de Campinas.

QUINTELA, B.M. **Implementação computacional paralela da homogeneização por expansão assintótica para análise de problemas mecânicos em 3D**. 2011. 95f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Curso de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal de Juiz de Fora.

ROHAN, E.; NAILI, S.; CIMRMAN, R.; LEMAIRE, T. Multiscale modeling of a fluid saturated medium with double porosity: relevance to the compact bone. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Philadelphia, v. 60, p. 857-881, 2012.