

Helicoides e Retas Reversas: Uma Análise

JOSÉ FERNANDO UGOSKI SILVEIRA¹; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER²

¹Universidade Federal de Pelotas– jsilveira74@yahoo.com.br

²Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

A área de Geometria diferencial estuda superfícies e suas propriedades, utilizando o cálculo diferencial e integral para obtenção de elementos geométricos. O objetivo desse trabalho é apresentar um resultado encontrado para o desafio de, dado duas retas reversas quaisquer, determinar explicitamente um helicóide mínimo que passa por elas. Esse é um problema que até o momento não se encontra resolvido na literatura clássica da matemática.

Inicialmente, utilizamos conceitos da geometria diferencial segundo Delgado (2017), para analisar as superfícies helicoidais, calculando sua curvatura média e verificando que o helicóide é uma superfície mínima, além de explorar sua posição no espaço.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada foi a consulta a livros e artigos relacionados à área (ver [A] e [B]) juntamente a encontros semanais com a professora orientadora. Ademais foi utilizado o software GEOGEBRA para a criação das figuras utilizadas ao longo do trabalho.

3.RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Parametrização do helicóide

De maneira geral, pode-se dizer que uma superfície regrada é uma superfície gerada por uma reta movendo-se ao longo de uma curva α denominada de curva diretriz, definida por uma aplicação $X: I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por:

$$X(v, u) = \alpha(v) + u \cdot w(v) \quad (1)$$

tal que, X é de classe C^∞ ; X é homeomorfa, e se $q \in I \times J$, $X_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetivo.

O helicóide é uma forma particular de superfície regrada, que pode ser expresso através da equação (1), onde $\alpha(t)$ é a curva diretriz e $w(t)$ a curva geratriz. Para determinar tais curvas, encontrou-se primeiro a parametrização de uma hélice circular, utilizando-se um ponto P com coordenadas (x, y, z) que percorre uma trajetória ao longo dela (Figura 1) e sua projeção no plano xy (Figura 2).

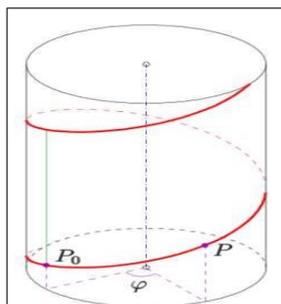


Figura 1- Hélice circular.

Fonte: Acervo pessoal, 2023.

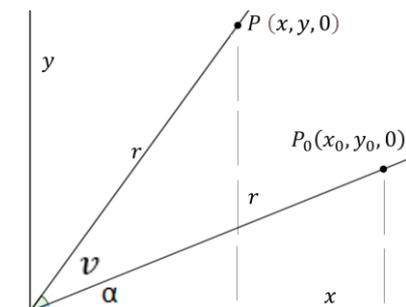


Figura 2 - Projeção de P no plano xy

Fonte: Acervo pessoal, 2023.

Cenário no qual, denotando o ângulo φ entre os pontos P e P₀ da Figura 1 como v na Figura 2, encontrou-se as respectivas equações:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\alpha + v) & (I) & & x_0 &= r \cdot \cos(\alpha) & (III) \\ y &= r \cdot \sin(\alpha + v) & (II) & & y_0 &= r \cdot \sin(\alpha) & (IV) \end{aligned}$$

Desenvolvendo as equações obtidas, chegamos na parametrização da hélice circular da Figura 1, que é:

$$\theta(v) = (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v, y_0 \cdot \cos v + x_0 \cdot \sin v, z_0 + c \cdot v), \quad x_0, y_0, c \in \mathbb{R}$$

Observe que a parametrização acima pode ser escrita na forma da aplicação (1) considerando $w(v) = (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v, y_0 \cdot \cos v + x_0 \cdot \sin v, 0)$ e $\alpha(v) = (0, 0, z_0 + c \cdot v)$.

3.2 Helicoide como superfície mínima.

Definição 1: Seja $X(v, u)$ a parametrização de uma superfície S e X_u e X_v as bases do plano tangente a um ponto $p \in S$, denominado de TpS , sabe-se que os coeficientes da 1ª Forma Fundamental deste plano são definidos por $E = \langle X_u, X_u \rangle$; $F = \langle X_u, X_v \rangle$; $G = \langle X_v, X_v \rangle$, onde a notação X_u significa a derivada parcial de X em relação a u .

Além disso, seja $\vec{w} \in TpS$ e $dN_p(\vec{w})$ a transformação linear que nós dá a taxa de variação do vetor normal a $\vec{w} \in TpS$, onde $dN_p(\vec{w}) = \lambda \cdot N_u + \mu \cdot N_v$, com $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$, temos que a expressão da 2ª forma fundamental é dada por:

$$\begin{aligned} II_p(\vec{w}) &= - \langle dN_p(\vec{w}), \vec{w} \rangle \\ II_p(\vec{w}) &= - \langle (\lambda \cdot N_u + \mu \cdot N_v), (\lambda \cdot X_u + \mu \cdot X_v) \rangle \\ II_p(\vec{w}) &= -[\lambda^2 \cdot \langle N_u, X_u \rangle + 2 \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \langle N_u, X_v \rangle + \mu^2 \cdot \langle N_v, X_v \rangle] \end{aligned}$$

Ademais vale ressaltar, com o intuito de simplificar os cálculos que:

$$\langle N_u, X_u \rangle = - \langle N, X_{uu} \rangle; \langle N_u, X_v \rangle = - \langle N, X_{uv} \rangle; \langle N_v, X_v \rangle = - \langle N, X_{vv} \rangle;$$

Em que $\langle N_u, X_u \rangle = -e(q)$; $\langle N_u, X_v \rangle = -f(q)$; $\langle N_v, X_v \rangle = -g(q)$, são nomeados de coeficientes da 2ª Forma fundamental.

Definição 2[B, página 193]: A curvatura média de uma superfície S em um ponto p, é definida como:

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Eg - 2 \cdot Ff + eG}{EG - F^2} \right) \quad (2)$$

A definição 2 é importante pois nos permite verificar que o helicoide é uma superfície mínima, que decorre do fato de sua curvatura média ser nula.

A parametrização dessa superfície no formato de superfície regrada obtida anteriormente foi:

$$X(v, u) = (0, 0, z_0 + c \cdot v) + u \cdot (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v, y_0 \cdot \cos v + x_0 \cdot \sin v, 0) \quad (3)$$

Calculando os coeficientes da 1ª Forma fundamental obtemos:

$$X_u = (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v, y_0 \cdot \cos v + x_0 \cdot \sin v, 0)$$

$$X_v = (u \cdot (-x_0 \cdot \sin v - y_0 \cdot \cos v), u \cdot (-y_0 \cdot \sin v + x_0 \cdot \cos v), c)$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle \rightarrow E = x_0^2 + y_0^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle \rightarrow F = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle \rightarrow G = u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) + c^2$$

Calculando os coeficientes da 2ª Forma fundamental obtemos:

$$N = \frac{\overrightarrow{X_u} \times \overrightarrow{X_v}}{|\overrightarrow{X_u} \times \overrightarrow{X_v}|} = \left(\frac{c \cdot (y_0 \cdot \cos v + x_0 \cdot \sin v)}{\sqrt{u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) + c^2}}, \frac{-c \cdot (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v)}{\sqrt{u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) + c^2}}, \frac{u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2)}{\sqrt{u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) + c^2}} \right)$$

$$X_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$X_{uv} = (-x_0 \cdot \sin v - y_0 \cdot \cos v, -y_0 \cdot \sin v + x_0 \cdot \cos v, 0)$$

$$X_{vv} = (u \cdot (-x_0 \cdot \cos v + y_0 \cdot \sin v), u \cdot (-y_0 \cdot \cos v - x_0 \cdot \sin v), 0)$$

$$e(q) = \langle N, X_{uu} \rangle \rightarrow e(q) = 0$$

$$f(q) = \langle N, X_{uv} \rangle \rightarrow f(q) = \frac{-c \cdot (y_0^2 \cdot \cos^2 v + x_0^2 \cdot \sin^2 v)}{\sqrt{u^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) + c^2}}$$

$$g(q) = \langle N, X_{vv} \rangle \rightarrow g(q) = 0$$

Substituindo os coeficientes da 1ª Forma Fundamental e da 2ª Forma fundamental na equação (2) conseguimos que:

$$H(p) = 0$$

Provando que o helicóide é uma superfície mínima.

3.3 Helicóide que passa entre duas retas reversas

Sejam as retas $x_0 = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a, b, c)$ e $x_1 = (x_1, y_1, z_1) + t \cdot (d, e, f)$ retas quaisquer, tais que não exista intersecção entre elas e que também não sejam paralelas. Resolveremos nesse trabalho o problema de maneira particularizada conforme mostra a figura 3, tal que $x_0 = (0, 0, 0) + t \cdot (a, b, 0)$ e $x_1 = (0, 0, D) + t \cdot (d, e, 0)$, cenário no qual D é a distância entre x_0 e x_1 .

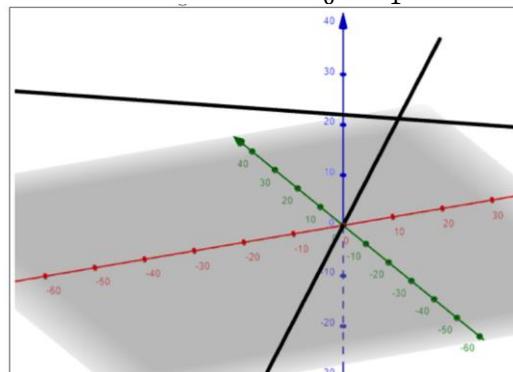


Figura 3 - Retas reversas.
Fonte: Acervo pessoal, 2023.

Fazendo a projeção das retas x_0 e x_1 no eixo $z=0$, conseguiremos determinar o ângulo entre elas, através da expressão: $\arccos \left(\frac{\overrightarrow{v_0} \cdot \overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_0}| \cdot |\overrightarrow{v_1}|} \right)$ (4).

Para o helicóide ficar determinado entre essas retas reversas, sabemos que o parâmetro v do helicóide deve ser definido como: $0 \leq v \leq \arccos\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1|}\right)$, com \vec{v}_0 sendo o vetor diretor de x_0 e \vec{v}_1 o vetor diretor de x_1 .

Além disso o eixo z da equação (3) que é $z = z_0 + c \cdot v$, deve ser definido como $z_0 = 0$ (por causa da cota do eixo z da reta x_0) fazendo com que c seja dado por: $c = \frac{D}{\arccos\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1|}\right)}$, já que quando v for máximo, o helicóide deve estar com cota igual a D .

Proposição - Caso 1: Se o $\text{Det} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} > 0$, então o helicóide que está contido entre x_0 e x_1 , cuja parametrização é dada por: $X(v, u) = (0, 0, z_0 + c \cdot v) + u \cdot (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v, y_0 \cos v + x_0 \cdot \sin v, 0)$, terá: $x_0 = a$, $y_0 = b$ e $c = \frac{D}{\arccos\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1|}\right)}$, com $0 \leq v \leq \arccos\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1|}\right)$. **Caso 2:** Se o $\text{Det} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} < 0$, então $X(v, u) = (0, 0, z_0 + c \cdot v) + u \cdot (x_0 \cdot \cos v - y_0 \cdot \sin v, y_0 \cos v + x_0 \cdot \sin v, 0)$, terá: $x_0 = a$, $y_0 = b$ e $c = -\frac{D}{\arccos\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1|}\right)}$, com $-\arccos\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1|}\right) \leq v \leq 0$.

Exemplo caso 2

Se x_0 e x_1 forem definidas como:
 $x_0 = (0, 0, 0) + t \cdot (7, 8, 0)$
 $x_1 = (0, 0, 12.57) + t \cdot (23, 5, 0)$.
 Teremos: $\text{Det} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = -149 < 0$;
 $-0.203\pi \leq v \leq 0$, $c = -19.71$ com
 $z_0 = 0$, resultando na superfície:
 $X(v, u) = (0, 0, -19.7 \cdot v) + u \cdot (7 \cdot \cos v - 8 \cdot \sin v, 8 \cos v + 7 \cdot \sin v, 0)$.

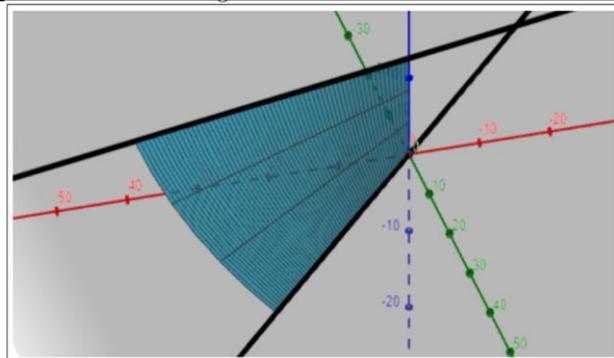


Figura 4 - Helicóide e suas retas reversas
Fonte: Acervo pessoal, 2023.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho possibilitou o aprendizado dos conceitos de superfície regada, curvatura média e a elaboração de um método de resolução para determinar a parametrização do helicóide que passa por duas retas reversas para o caso particular em que uma das retas está contida no plano coordenado $z=0$.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[A] OLIVEIRA, F.A.; ALMEIDA, D.M. **Superfícies regadas**. Revista eletrônica Paulista de Matemática. Bauru, v.8, p. 51-75, dez.2016.

[B] DELGADO, J; FRENSEL, K. **Geometria Diferencial I**. Acessado em 31 ago. 2023. Online. Disponível em:
<https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-diferencial-i>