TEOREMA DA RECURSÃO E A TEORIA DOS NÚMEROS NATURAIS

MAICON LUIZ COLLOVINI SALATTI[1]; VINICIUS CARVALHO BECK[2]; LUIS FELIPE KIESOW DE MACEDO[3].

[1] *UFPEL - UNIVERSIDADE FERERAL DE PELOTAS – luizcollovini@gmail.com*
[2] *UFPEL - UNIVERSIDADE FERERAL DE PELOTAS – vonoco@gmail.com*
[3] *UFPEL - UNIVERSIDADE FERERAL DE PELOTAS – felipekiesow@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

O Teorema da Recursão “é a nossa demonstração mais difícil envolvendo os números naturais” BLOCH (2011), ele entra em jogo quando se deseja obter objetos definidos indutivamente. Segundo COHEN (1963) “uma das aplicações mais usadas do Axioma da Indução é a definição recursiva de uma função com domínio em $\mathbb{N}$”. HALMOS (1974) destaca que “a introdução da adição nos números naturais é um típico exemplo de definição por indução”, no contexto da teoria baseada nos Axiomas de Peano.

A importância de se estudar de forma detalhada a construção do conjunto dos números naturais está no seu emprego na construção dos outros sistemas numéricos: LIMA (2012) explica que “uma exposição sistemática dos sistemas numéricos utilizados na Análise Matemática pode ser feita a partir dos números naturais, através de sucessivas extensões do conceito de número”.

Este trabalho surgiu a partir do estudo da construção dos sistemas numéricos, assunto que foi estudado durante o Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da UFPEL. Utilizou-se na realização do trabalho, consulta e pesquisa em livros que tratam ou tocam parcialmente na construção dos sistemas numéricos e na teoria dos conjuntos.

O objetivo deste trabalho é exibir uma demonstração clássica do teorema conhecido pelos nomes “Teorema da Recursão” ou “Teorema da Definição por Indução” e esclarecer alguns pontos, que geralmente, são omitidos na demonstração desse teorema na literatura sobre o assunto. Também é apresentado um simples exemplo de aplicação deste teorema dentro da teoria dos números naturais.

A seguir, com o intuito de fazer uma breve revisão bibliográfica, apresenta-se o teorema da recursão, bem como algumas definições necessárias na demonstração deste. Conforme encontra-se em COHEN (1963, p.18).

Teorema. (da recursão). Dado um conjunto A não vazio, $a \in A$ e uma função $g: A \longrightarrow A$, existe uma única função $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ com as seguintes propriedades:

(i) $f(1) = a$;
(ii) $f\big(s(n)\big) = g\big(f(n)\big)$.

Para realizar a sua demonstração é necessário exibir alguns tópicos relacionados à linguagem de conjuntos e da teoria dos números naturais, os quais os principais resultados utilizados são exibidos abaixo.

Definição 1. (função). Dados dois conjuntos A e B, *uma função* f *de* A *em* B, que simboliza-se por $f: A \longrightarrow B$, é uma relação $R \subset A \times B$ com as seguintes propriedades:

(i) Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$;
(ii) Se $(a, b), (a, b') \in R$ então $b' = b$.

Definição 2 (o conjunto $\mathbb{N}$). Dado um conjunto $\mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N}$ e uma função $\mathscr{s}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, chama-se de *Um Sistema de Números Naturais* à tripla $\langle \mathbb{N}, u, \mathscr{s} \rangle$ com as propriedades:

(i) A função $\mathscr{s}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetiva;

(ii) Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $u \in \mathbb{N} \setminus \mathscr{s}(\mathbb{N})$;

(iii) Dado $X \subset \mathbb{N}$ tal que $u \in X$ onde $u \in \mathbb{N} \setminus \mathscr{s}(\mathbb{N})$ e se $n \in X$ implica $\mathscr{s}(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

As três propriedades acima são chamados os *Axiomas de Peano*. Escreve-se simplesmente $\mathbb{N}$ para representar a tripla $\langle \mathbb{N}, u, \mathscr{s} \rangle$ com as três propriedades. A função $\mathscr{s}$ é chamada de função sucessor.

Teorema A (teorema do 1). O conjunto $\mathbb{N} \setminus \mathscr{s}(\mathbb{N})$ possui um único elemento. Veja a demonstração em COHEN (1963, p.17).

O único elemento de $\mathbb{N} \setminus \mathscr{s}(\mathbb{N})$ é simbolizado por 1. Assim temos a tripla $\langle \mathbb{N}, 1, \mathscr{s} \rangle$ como sendo um sistema de números naturais.

Teorema B. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $n \neq \mathscr{s}(n)$. Prova em LIMA (2012, p.34).

Segue-se a demonstração do teorema da recursão, conforme se encontra em COHEN (1963, p.18):

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os subconjuntos T de $\mathbb{N} \times A$ tal que

(1) $(1, a) \in X$;

(2) Se $(n, b) \in X$ então $\big(\mathscr{s}(n), g(b)\big) \in X$;

(3) $f \coloneqq \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$.

Como $\mathbb{N} \times A$ satisfaz as condições (1) e (2), $\mathcal{C}$ é não vazio. O conjunto f definido em (3) satisfaz (1) e (2). Disso, $f \in \mathcal{C}$ e por (3), $f \subset T$ para todo $T \in \mathcal{C}$. Mostraremos que f é a função requerida.

Seja $M \coloneqq \{n \in \mathbb{N}; (n, b) \in f \text{ para exatamente um } b \in A\}$. $1 \in M$, porque $f \in \mathcal{C}$, logo $(1, a) \in f$. Suponha $(1, b) \in f$ e $b \neq a$. Seja $f_b \coloneqq f - \{(1, b)\}$. Visto que $(1, a) \neq (1, b) \in f$, $(1, a) \in f_b$. Se $(n, c) \in f_b$ então $\big(\mathscr{s}(n), g(c)\big) \neq (1, b)$ e $\big(\mathscr{s}(n), g(c)\big) \in f_b$. Mas então $f_b \in \mathcal{C}$ e $f \subset f_b = f - \{(1, b)\}$, um subconjunto próprio de f. Contradição, logo $1 \in M$.

Se $n \in M$, então existe exatamente um $b \in A$ tal que $(n, b) \in f$. Visto que $f \in \mathcal{C}$, $\big(\mathscr{s}(n), g(b)\big) \in f$. Supondo que $(\mathscr{s}(n), c) \in f$ para algum $c \neq g(b)$ e seja $f_c \coloneqq f - \{(\mathscr{s}(n), c)\}$. Visto que $(\mathscr{s}(n), c) \neq (1, a) \in f$ tem-se $(1, a) \in f_c$. Se $(m, d) \in f_c$ então $\big(\mathscr{s}(m), g(c)\big) \neq (\mathscr{s}(n), c)$, caso contrário $\mathscr{s}(m) = \mathscr{s}(n)$ e $g(d) = c \neq g(b)$, de modo que $m = n$, $d \neq b$ e $(n, b), (n, d) \in f$, contrariando a hipótese de que $n \in M$. Mas então $\big(\mathscr{s}(m), g(d)\big) \in f_c$, disso $f_c \in \mathcal{C}$ e $f \subset f_c = f - \{(\mathscr{s}(n), c)\}$ um subconjunto próprio de f. Contradição! Segue-se que $\mathscr{s}(n) \in M$. Pelo axioma da indução $M = \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe exatamente um $b \in A$ tal que $(n, b) \in f$. Disso, f é uma função de $\mathbb{N}$ em A. Visto que $(1, a) \in f$, $f(1) = a$. Por (3), $f\big(\mathscr{s}(n)\big) = g(b)$ se, e somente se, $f(n) = b$. Disso, $f\big(\mathscr{s}(n)\big) = g\big(f(n)\big)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se f' é uma função de $\mathbb{N}$ em A tal que $f'(1) = a$ e $f'\big(\mathscr{s}(n)\big) = g\big(f'(n)\big)$, então $f'(1) = f(1)$. Se $f'(n) = f(n)$, então visto que g é uma função de A em A, segue que $f'\big(\mathscr{s}(n)\big) = g\big(f'(n)\big) = g\big(f(n)\big) = f\big(\mathscr{s}(n)\big)$. Pelo axioma da indução

$$f' = \big\{\big(n, f'(n)\big); n \in \mathbb{N}\big\} = \big\{\big(n, f(n)\big); n \in \mathbb{N}\big\} = f.$$

Disso, f é a única função de $\mathbb{N}$ em A com as propriedades requeridas. □

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada no trabalho foi, basicamente, a pesquisa bibliográfica procedida por uma análise da demonstração do teorema que visava esclarecer alguns pontos obscuros da demonstração. Mais precisamente, procurou-se esclarecer de modo mais aprofundado a razão pela qual as condições (1), (2) e (3) são satisfeitas na demonstração de COHEN (1963, p.18), pois nesse trabalho não estão explícitos alguns cálculos que comprovam que estas condições são cumpridas. Os textos BLOCH (2011), HALMOS (1974) e COPPEL (2009) citados nas referências, também apresentam a prova do teorema omitindo essencialmente os mesmos cálculos. Além disso, também é exibido um modo de se obter de forma concisa os números naturais sucessores de 1, com o intuito de mostrar uma aplicação do teorema na teoria dos números naturais.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O primeiro passo é saber se existem subconjuntos X de $\mathbb{N} \times A$ não vazios satisfazendo as condições(1) e (2), para logo em seguida verificar (3).

Condição(1):

De fato, existe o par ordenado $(1, a)$ em $\mathbb{N} \times A$ porque existe o elemento 1 em $\mathbb{N}$, fato garantido pelo teorema A. Além disso, existe um elemento a em A porque, por hipótese, é um conjunto não vazio. Isto mostra que o conjunto $\mathbb{N} \times A$ é não vazio e que ele satisfaz a condição (1).

Condição(2):

Agora, se existe o par (n, b) em $\mathbb{N} \times A$, vai existir $\big(s(n), g(b)\big)$ porque dado $n \in \mathbb{N}$ existe$s(n) \in \mathbb{N}$, porque s é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Por argumento semelhante, dado $b \in A$, como g é uma função de A em A tem-se $g(b) \in A$. Logo $(n, b) \in \mathbb{N} \times A$ implica $\big(s(n), g(b)\big) \in \mathbb{N} \times A$. Dessa forma o conjunto $\mathbb{N} \times A$ também satisfaz a condição(2). Um esquema gráfico dessa parte é mostrado na figura 1.

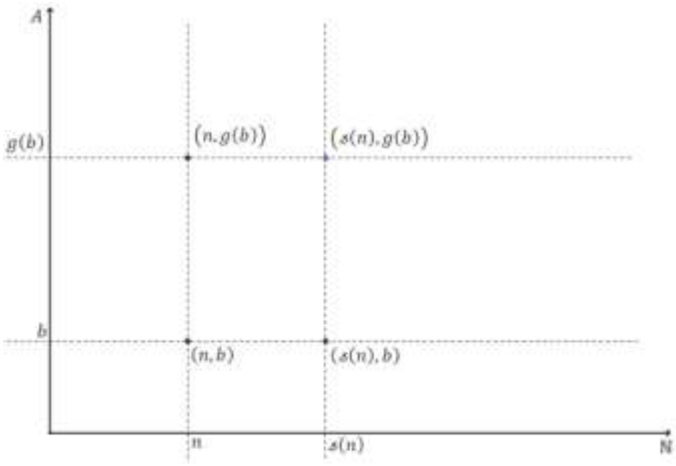

Figura 1: (n, b) em $\mathbb{N} \times A$ implica a existência de $\big(s(n), g(b)\big)$ em $\mathbb{N} \times A$.
Fonte: Os autores.

Condição(3):

Ao se definir o conjunto $f := \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$com o objetivo de mostrar que esse conjunto é a função desejada, deve-se verificar que f satisfaz as condições (i) e (ii) da definição de função. Verificação de (i) é como se segue: consideremos o conjunto $N := \{n \in \mathbb{N};\ \text{existe}\, b \in A\ \text{tal que}\ (n, b) \in f\}$. Para $n = 1$ tem-se pelo menos o elemento a em A tal que $(1, a) \in f$ porque f é a interseção de subconjuntos de $\mathbb{N} \times A$ que satisfazem a condição (1). Logo $1 \in N$. Supondo $n \in N$, então para $s(n)$ tem-se que existe pelo menos o elemento $g(b)$ em A tal que

$\big(s(n), g(b)\big) \in f$, porque dada a hipótese de que $(n, b) \in f$, pela condição (2) tem-se$\big(s(n), g(b)\big) \in f$, pois f é a interseção de conjuntos que satisfazem a condição(2). Logo $n \in N$ implica $s(n) \in N$. Assim pelo axioma da indução $N = \mathbb{N}$ e f satisfaz a condição (i) da definição de função. A condição (ii) já foi amplamente verificada na demonstração de COHEN (1963).

Aplicação do teorema na Teoria dos Números Naturais:

O axioma (iii) da definição do conjunto dos números naturais é bastante conhecido pelo nome Axioma da Indução. “Intuitivamente, ele significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s\big(s(1)\big)$, e assim por diante, com um número finito de etapas” LIMA (2013). Utilizando o teorema da recursão é possível dar uma *prova*de que é possível obter o “restante” dos números naturais a partir do número 1.

Seja $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a = s(1)$ e g igual à restrição da função s ao subconjunto $\mathbb{N} \setminus \{1\}$; pelo teorema da recursão existe uma única função $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ definida por:

$$f(1) = s(1) \text{e} f\big(s(n)\big) = s\big(f(n)\big).$$

donde se obtém: $s(1), s\big(s(1)\big), s\Big(s\big(s(1)\big)\Big), s\bigg(s\Big(s\big(s(1)\big)\Big)\bigg)$, ...

definindo-se $s(1) = 2$, $s\big(s(1)\big) = 3$, etc. obtém-se o conjunto $s(\mathbb{N}) = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$, como $\mathbb{N} = \{1\} \cup s(\mathbb{N})$, pelo teorema A, tem-se $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Esta aplicação mostra que é possível obter todos os números naturais a partir do número 1 onde a função f serve para tomar-se as iteradas da função s.

4. CONCLUSÕES

A apresentação da demonstração do teorema da recursão junto com o detalhamento de algumas partes dessa demonstração permite um entendimento mais preciso dos passos necessários à sua demonstração. Oexemplo discutidomostrou de maneira sólida,a possibilidade de se obter todos os números naturais a partir do 1 tomando-se o seu sucessor e assim por diante, dando uma aplicação simples desse teorema dentro da teoria dos números naturais.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLOCH. E. D. **The Real Numbers and Real Analysis**. New York: Springer, 2011.

COHEN L. W. EHRLICH, G. **The Structure of the Real Numbers System**. New York:Van Nostrand Reinhold Company, 1963.

COPPEL. W. A. The Expanding Universe of Numbers. In: COPPEL. W. A. **Number Theory an Introduction to Mathematics**. New York: Springer, 2009. Cap. 1, p.1-82.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. New York: Springer-Verlag, 1974.

LIMA, E. L. Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não - Enumeráveis. In: LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Cap. 2, p. 32-58.

LIMA, E. L. Conjuntos Finitos e Infinitos. In: LIMA, E. L. **Análise Real Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Cap. 1, p. 1-11.