

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA APLICADA NA OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS METÁLICAS

BRUNA DA SILVA LEITZKE¹; VALDECIR BOTTEGA²

¹Universidade Federal de Pelotas – brunaleitzke@hotmail.com

²Universidade Federal de Pelotas - vldcirbo@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

A programação Matemática tem a preocupação de determinar os extremos de uma função f (chamada função objetivo) definida em R^n e limitada pelo conjunto, desse mesmo espaço, que pode ser definido por restrições de igualdade e desigualdade, que podem ser lineares ou não. Várias são as classificações das categorias desses problemas, essas que dependem da natureza e forma das variáveis de planejamento, restrições e função objetiva. Mas aqui apenas duas categorias são interessantes, a Programação Linear (PL) e Não Linear (PNL).

A programação linear (PL) (HADLEY 1982) descreve uma classe particular de problemas, nos quais a função objetiva e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. Os extremos de problemas de PL podem não estar no interior, mas sim no limite do espaço das soluções descritas pelas restrições. Com isso, é possível projetar algoritmos que são satisfatórios para alcançar melhores soluções. Neste trabalho, será feito um estudo sobre otimização do peso e dimensões de estruturas metálicas tipo portal, que sofrem a ação de forças externas provocadas por carregamento como por exemplo, tráfego de pessoas e ou veículos (pontes e passarelas). Estas forças podem provocar deformações que comprometam a estabilidade e segurança da estrutura. Por isso, é necessário um correto dimensionamento da estrutura, que evite deformações e, por outro lado, que evite o desperdício de material.

2. METODOLOGIA

Problema de Otimização

Em muitos projetos estruturais, estamos interessados na carga máxima que uma estrutura pode suportar, chamada carga limite ou carga de colapso. É possível obter uma estimativa confiável desta carga supondo que o material se comporte como um material plástico perfeitamente elástico. Quer dizer, é assumindo que o material segue um diagrama de tensões e deformações, que resulta numa tensão constante para deformações maiores que um determinado valor (QUEIROZ. 1993).

Temos como exemplo o problema de minimizar o peso de uma armação tipo portal, o qual é sujeito a uma carga horizontal e vertical de magnitude p conforme a Figura 2.1.

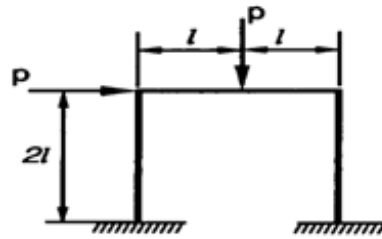


Figura 2.1: Projeto de Armação de um Portal Contra Colapso Plástico

Para este problema presumimos que a viga horizontal da estrutura tem um tamanho diferente das duas colunas verticais. A seção transversal da viga e a colunas tem um momento plástico m_{pB} e m_{pC} , respectivamente. Estes dois momentos plásticos são dependentes das propriedades da seção transversal dos seus respectivos membros e, para isso, são as variáveis de projetos para o problema.

Para seções de viga em curva há uma relação linear aproximada entre o peso w_1 , e o módulo da seção plástica, m_p/σ_0 . Esta suposição possibilita a formulação do problema como problema linear de um modelo plástico.

Então, presumiremos que o problema de minimizar o peso de uma armação para uma carga limite se reduz a minimizar uma função:

$$W = 2m_{pC}l_C + m_{pB}l_B = 2m_{pC}(2l) + 2m_{pB}(2l) \quad (2.1)$$

No intuito de adimensionalizar o problema nós dividimos ambos os lados da equação 2.1, por $2pl^2$ para obter o peso da função objetivo:

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{w}{2pl^2} \right) = 2 \frac{m_{pC}}{pl} + \frac{m_{pB}}{pl} = 2x_1 + x_2 \quad (2.2)$$

A Figura 2.2 mostra todas as possíveis situações de colapso para a armação (HAFTKA, 1990). A carga que leva a estrutura para qualquer uma das situações de colapso é obtida pela equivalência de trabalho virtual entre o trabalho externo das cargas aplicadas e o trabalho interno dos momentos plásticos experimentados enquanto sujeitas a rotações virtuais dos pontos de plástificação. Assim um projeto admissível é um, para o qual a capacidade de trabalho virtual interno é maior ou igual ao trabalho externo.

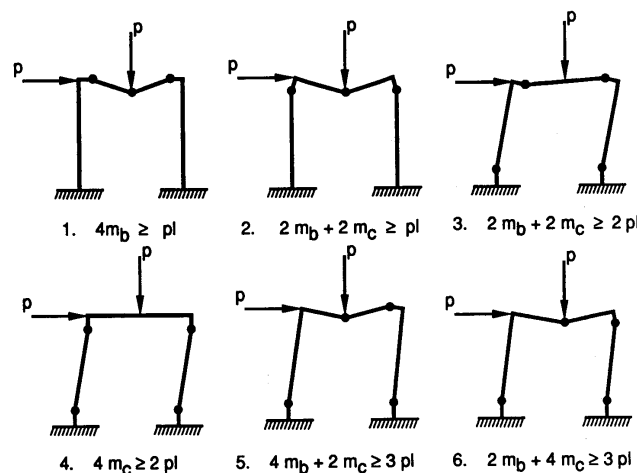


Figura 2.2: Mecanismo de Colapso para Armação do Portal

Adimensionalizando as restrições associadas às situações de colapso obtemos:

$$4x_2 \geq 1 \quad (2.3)$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 1 \quad (2.4)$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (2.5)$$

$$2x_1 \geq 1 \quad (2.6)$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 3 \quad (2.7)$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad (2.8)$$

Como x_1 e x_2 representam as seções transversais é necessário que:

$$x_1 \geq 0, \text{ e } x_2 \geq 0 \quad (2.9)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Solução Geométrica do problema

Para problemas simples com apenas duas ou até três variáveis de projeto, podemos usar uma técnica para encontrar a solução gráfica do problema chamada Programação Linear Geométrica (ANTON 2001). Vamos considerar o problema de carga limite de um portal do exemplo anterior. O problema foi reduzido a minimizar a função objetiva

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \quad (3.1)$$

Descrevemos todas as equações (2.3) a (2.8) com igualdades (isto é, as linhas identificam os limites de restrições). As regiões possíveis e impossíveis são separadas por uma linha restritiva. Para todas as restrições de desigualdade, encontraremos uma possível região que é um polígono convexo, que está ilustrada na Figura 2.3.

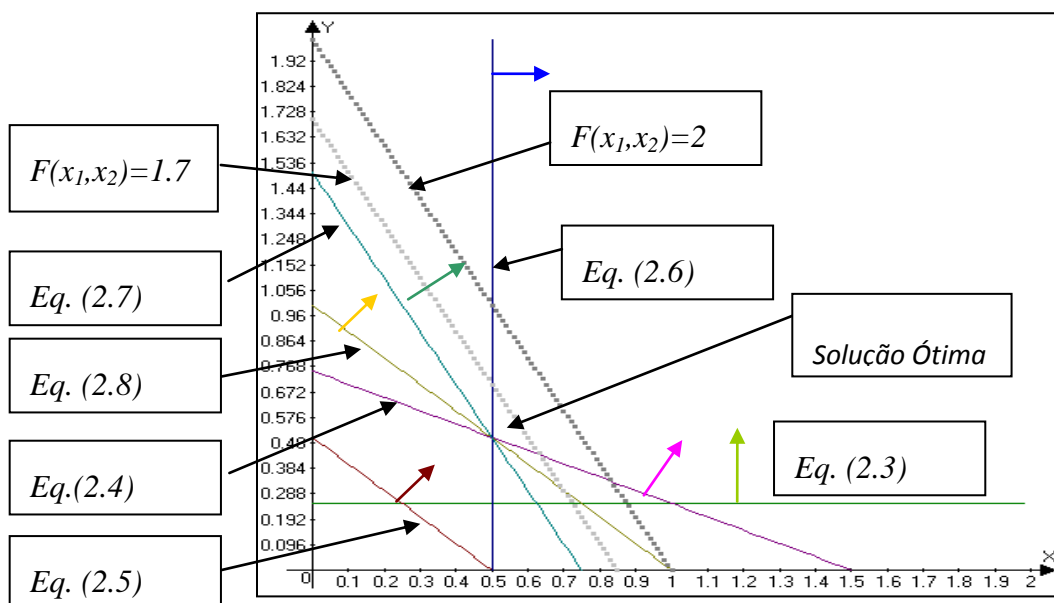


Figura 2.3: Solução Gráfica do Portal na Forma de Programação Linear

A direção de f decrescente é mostrada na Figura 2.3. O ponto ótimo é menor valor da função objetiva, onde a reta toca a região viável. Neste caso, solução ótima é $f_{\min} = 1.5$, indicada por

$$x_1 = x_2 = 1/2 \quad (3.2)$$

Então pela equação 2.2, $f(x_1, x_2) = \left(\frac{w}{2pl^2} \right) = 1.5$, logo o peso mínimo para a

estrutura será $w = 3pl^2$.

Como no caso bidimensional da Figura 2.3, exceto casos de degeneração, uma função objetiva linear em \mathbf{R}^n alcança seu mínimo em um ponto extremo de uma região poliedral convexa livre.

O procedimento acima não pode ser usado para problemas de Programação Linear que envolvam mais de três variáveis. Temos que buscar alternativas e meios para resolver tais problemas, como por exemplo, o Método Simplex, que é capaz de resolver com muita eficiência problemas que envolvam um grande número de variáveis e restrições.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, pode-se observar a aplicabilidade das teorias de Programação Matemática na otimização de estruturas, podendo servir como ferramenta para auxiliar na melhoria de projetos estruturais, levando em conta sua resposta a solicitações mecânicas. Encontrando assim, melhores valores para as variáveis do projeto, satisfazendo todas as restrições impostas, buscando a diminuição de custos preservando a confiabilidade e segurança do projeto.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTON, H., RORRES, C. G., **Álgebra Linear com Aplicações**. Bookman, Porto Alegre. 2001.
- HADLEY, G. **Programação Linear**. Rio de Janeiro: Guanabara dois S.A. 1982.
- QUEIROZ, G. **Elementos das Estruturas de Aço**. Belo Horizonte, 1993.
- HAFTKA. R. T. **Elements of structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, Boston. 1990.