

COMPORTAMENTO EFETIVO DE UMA BARRA BIFÁSICA PERIÓDICA NÃO LINEAR, ATRAVÉS DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA*

ROBERTO MARTINS DA SILVA DÉCIO JÚNIOR¹; LESLIE D. P. FERNÁNDEZ²

¹ Acadêmico da Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Pelotas –
roberto.decio@ufpel.edu.br

² Professor do Departamento de Matemática e Estatística, Instituto de Física e Matemática,
Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

* Projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01

1. INTRODUÇÃO

Um compósito é um material heterogêneo formado por arranjo microscópico de materiais homogêneos diferentes. O mercado de compósitos tem crescido de forma constante nas últimas décadas e inclui diversas aplicações aeroespaciais, biomédicas, na indústria automobilística, bem como na infraestrutura civil (LEVY NETO, 2006). Isto se deve a que as propriedades físicas efetivas (macroscópicas) dos compósitos reúnem e melhoram as propriedades dos seus materiais componentes.

Uma das vias é estudar o compósito em uma microescala, e então passar as informações obtidas para sua macroescala, sendo esta técnica conhecida como homogeneização porque, na macroescala, o compósito é equivalente a um material homogêneo, no sentido em que as propriedades do material homogêneo são as propriedades efetivas do compósito. Logo, o problema é obter as propriedades do material equivalente via homogeneização (PANASENKO, 2008).

O método de homogeneização assintótica (MHA) baseia-se no desenvolvimento assintótico em escala dupla da solução do problema de valores iniciais e de contorno que modela o comportamento físico do compósito, o qual produz uma sequência de problemas cujo limite é o modelo do material homogêneo equivalente. Este método apresenta vantagens em relação a métodos numéricos usuais, como o método de elementos finitos, principalmente pelo baixo custo e esforço computacional exigido. Além disto, o erro da solução assintótica é geralmente de ordem muito pequena, o que significa uma ótima aproximação da solução exata (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

O MHA tem sido aplicado com sucesso em diversos problemas físicos lineares, porém, comportamentos não lineares têm sido pouco estudados. Assim, este trabalho tem por objetivo determinar e avaliar, via o MHA, a lei efetiva de uma barra bifásica elástica não linear com estrutura periódica (ver Figura 1).



Figura 1: Ilustração de uma barra bifásica periódica

2. METODOLOGIA

Da aplicação do MHA no problema descrito acima obtém-se o algoritmo que apresentamos a seguir (para mais detalhes, ver: seção 7 do capítulo 3 de

BAKHVALOV; PANASENKO (1989) e capítulo 2 de FERNÁNDEZ, 2006). Da equação diferencial do problema local tem-se que:

$$\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \equiv \bar{\sigma}$$

onde σ é a tensão na barra, y é a variável espacial que descreve a microescala, $\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y}$ é a deformação em termos da deformação média $\bar{\varepsilon} = \frac{du_0}{dx}$ (com u_0 o primeiro termo da série assintótica da solução) corrigida pela perturbação local $\frac{\partial N}{\partial y}$ (com N a solução do chamado problema local), e $\bar{\sigma}$ é a tensão média na barra.

O algoritmo proposto consiste em achar a relação funcional entre $\bar{\sigma}$ e $\bar{\varepsilon}$ que independe de y , ou seja, a lei efetiva.

Isolando $\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y}$ na lei para σ , obtemos a função inversa $\sigma^{-1}(\bar{\sigma}, y)$, ou seja,

$$\sigma^{-1}(\bar{\sigma}, y) = \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

e, aplicando agora o operador da média sobre a célula de periodicidade $\langle \cdot \rangle$ na equação acima, o que consiste em aplicar a integral definida no intervalo $[0,1]$ em ambos os lados, e sabendo que a função N é 1-periódica obtém-se que

$$\frac{du_0}{dx} = \langle \sigma^{-1}(\bar{\sigma}, y) \rangle$$

O próximo passo do algoritmo é isolar $\bar{\sigma}$ no resultado acima, obtendo uma lei que depende de $\frac{du_0}{dx}$, ou ainda:

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma^{-1} \rangle^{-1} \left(\frac{du_0}{dx} \right) = \sigma^e \left(\frac{du_0}{dx} \right)$$

sendo $\sigma^e \left(\frac{du_0}{dx} \right)$ a lei efetiva da propriedade σ neste material.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere o caso em que a tensão σ é dada pela relação constitutiva:

$$\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \begin{cases} \sigma_1 = a_1 \cdot \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y} \right), & y \in (0, c_1) \\ \sigma_2 = a_2 \cdot \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y} \right)^{\frac{1}{2}}, & y \in (c_1, 1) \end{cases}$$

onde $(0, c_1)$ é o subintervalo da célula de periodicidade ocupado pela fase 1 (material linear), e $(c_1, 1)$ é o ocupado pela fase 2 (material não linear) e a_1 e a_2 são as propriedades elásticas dos materiais constituintes, respectivamente. Aplicando o algoritmo descrito nesta relação, obtém-se a lei efetiva (normalizada por a_1):

$$\frac{\sigma^e(\bar{\varepsilon})}{a_1} = \frac{\lambda}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2} \lambda \right)^2 + \frac{4}{c_2} \bar{\varepsilon}} - \frac{c_1}{c_2} \lambda \right),$$

onde $c_2 = 1 - c_1$ e $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$. Esta lei efetiva foi avaliada para diferentes valores das constantes $\bar{\varepsilon}$, λ e c_2 através dos gráficos a seguir, gerados em MatLab.

Na Figura 2 observa-se que a medida que aumenta-se a concentração do material não linear no composto, a lei efetiva se aproxima da lei do material 2, e

vice-versa, o que reforça a validade da equação obtida através do algoritmo. Além disso, para valores diferentes de λ tal comportamento se mantém.

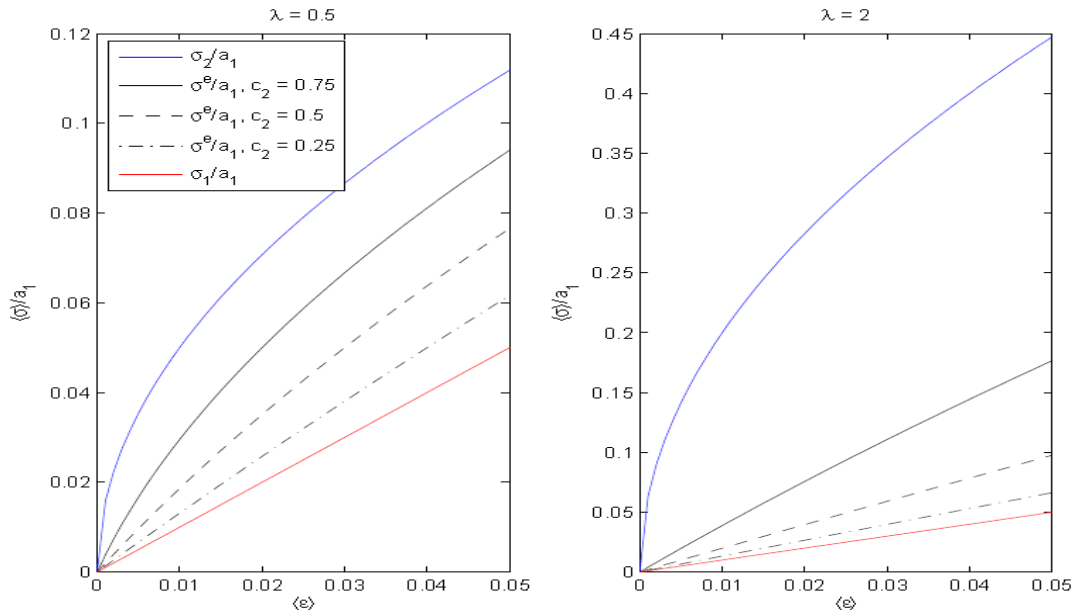


Figura 2: Lei efetiva em função de $\bar{\epsilon}$ ($=\langle\epsilon\rangle$) para diferentes valores de λ e c_2 .

No gráfico da figura 3 observa-se novamente que aumentando a quantidade do material 2 no compósito a lei efetiva tende à do mesmo material, e a recíproca também ocorre. É visto também que a velocidade de variação da lei efetiva aumenta para valores maiores de λ . Além disso, a tensão normalizada da fase 2 $\frac{\sigma_2}{a_1}$ tende a 0 juntamente com λ , o que é esperado devido a definição de σ_2 .

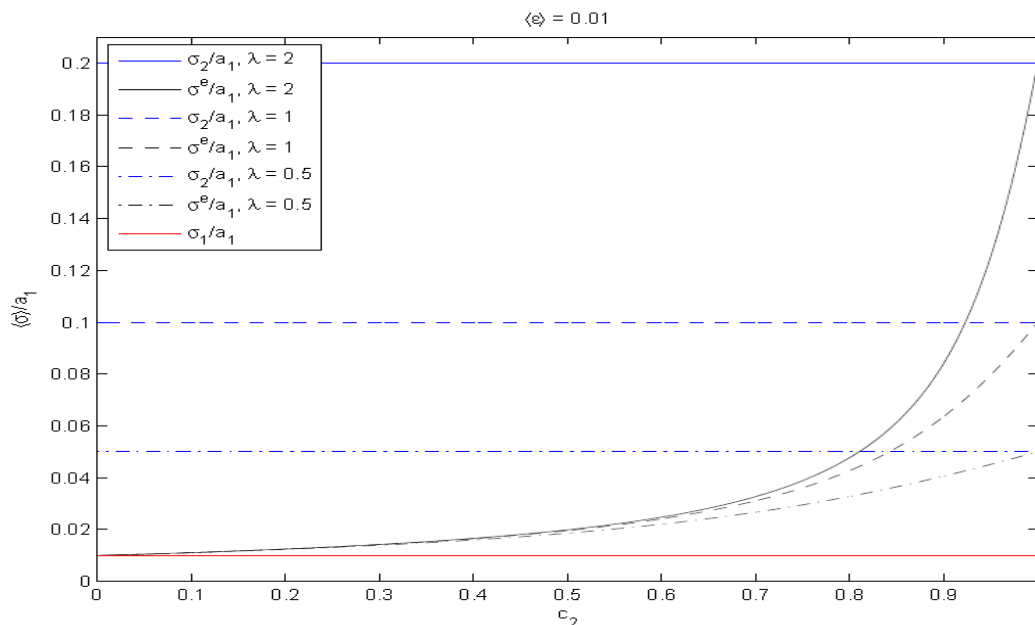


Figura 3: Lei efetiva em função de c_2 para $\bar{\epsilon}$ ($=\langle\epsilon\rangle$) fixo e diferentes valores de λ .

Finalmente, da Figura 4, tem-se que a lei efetiva cresce à medida que a razão λ cresce. Observa-se também um ponto de inversão das propriedades dos

dois materiais para $\lambda = 0,1$, o que, devido às definições de σ_1 e σ_2 , ocorrerá sempre nos pontos em que $\lambda = \sqrt{\bar{\epsilon}}$. No gráfico da direita é enfatizado o fato de que a tendência de $\frac{\sigma^e(\bar{\epsilon})}{\sigma_1}$ segue sendo para a propriedade do material cuja concentração está aumentando.

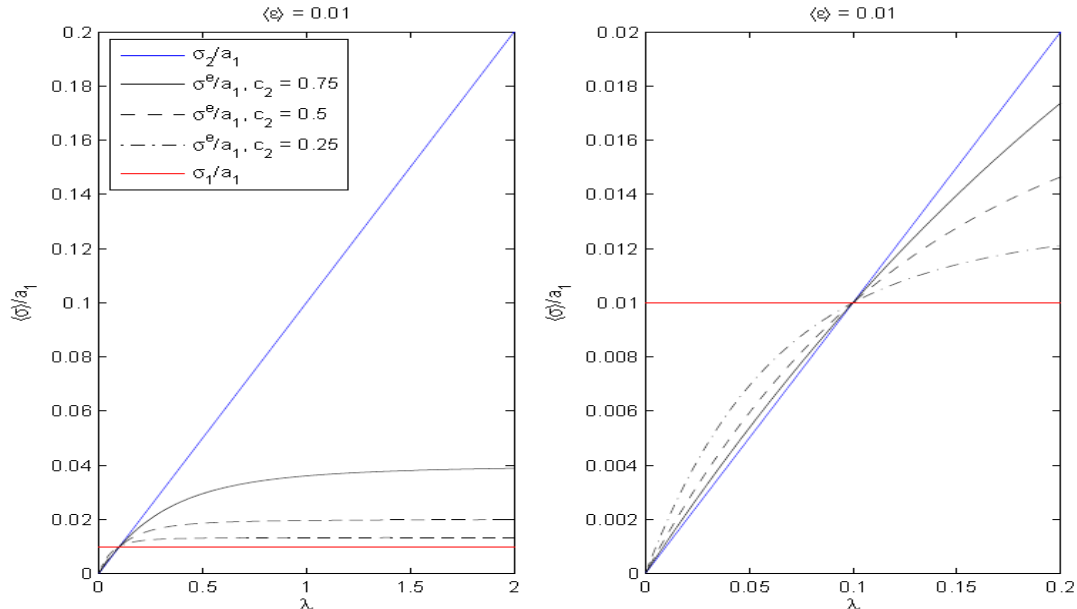


Figura 4: Lei efetiva em função de λ para $\bar{\epsilon} (= \langle \epsilon \rangle)$ fixo e diferentes valores de c_2 .

4. CONCLUSÕES

A lei efetiva da barra bifásica periódica não linear foi obtida com sucesso via MHA, e pode ser avaliada sob o ponto de vista de cada parâmetro envolvido no problema. Além disso, nessa avaliação, foi observada a validade da lei obtida através de determinadas características dos gráficos gerados para tal estudo.

Diante disso, conclui-se que o estudo das propriedades dos materiais não lineares deve prosseguir, dada a escassez de trabalhos acerca do assunto e o sucesso na aplicação do MHA realizada neste trabalho.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenization: Averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

FERNANDEZ, L. D. P. **Procedimientos asintóticos y variacionales de homogeneización em la evaluación del comportamiento efectivo de compuestos elásticos no lineales**. Janeiro, 2006. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas) – Curso de Pós-graduação em Ciências Matemáticas, Universidade de Havana.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais: ciência e tecnologia**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

PANASENKO, G. P. Homogenization for Periodic Media: from Microscale to Macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, Rússia, v.71, n.4, p. 681-694, 2008.